Elektrodynamik

Stefan Weinzierl

10. Juli 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Literatur

Literatur:

- J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons
- L. Landau und E. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 2: Klassische Feldtheorie, Akademie-Verlag, Berlin
- F. Scheck, Theoretische Physik 3: Klassische Feldtheorie, Springer, Berlin

1.2 Historisches

625-547 v. Chr.	Thales von Milet	Körper ändern ihre Eigenschaften, wenn man sie an anderen Körpern reibt (Reibungselektrizität).
$\sim$ 1250	P. Peregrinus	Richtung von Kompaßnadeln zeigt auf Magneten, div $\vec{B}=0$.
1766	J. P. Priestley	$V=$ const in einer Metallkugel, Vermutung des $1/r^2$-Gesetzes.
1769	J. Robinson	$1/r^{2\pm 0.06}$.
1772	H. Cavendish	$1/r^{2\pm 0.02}$.
1785	Ch. A. Coulomb	Bestimmung des $1/r^2$-Gesetzes mit der Drehwaage.
1813	S.D. Poisson	Gaußsches Gesetz: div $\vec{E}=4\pi\rho$.
1820	H. C. Oersted	Kompaßnadel bewegt sich bei Entladung einer Leidener Flasche.
1820	A. M. Ampère	Kräfte zwischen Strömen (eine Woche später).
1820	J. Biot, F. Savart	Biot-Savart-Gesetz (6 Wochen später).
1820	A. M. Ampère	rot $\vec{B}=4\pi\vec{j}/c$.
1831	M. Faraday	Induktionsgesetz: rot $\vec{E}=-\dot{B}/c$.
1843	M. Faraday	Kontinuitätsgleichung: div $\vec{j}+\dot{\rho}=0$.
1864	J. C. Maxwell	Verschiebungsstrom und Maxwellsche Gleichungen.
1888	H. Hertz	elektromagnetische Wellen.
1905	A. Einstein	Spezielle Relativitätstheorie.
1915	A. Einstein	Allgemeine Relativitätstheorie.
1948	R.P. Feynman, J. Schwinger, S.-I. Tomonaga	Quantenelektrodynamik
1954	C.N. Yang, R.L. Mills	nicht-abelsche Eichtheorien
1967	S. Glashow, A. Salam, S. Weinberg	elektroschwache Wechselwirkung
1972	H. Fritzsch, M. Gell-Mann	starke Wechselwirkung
1972	G. ’t Hooft, M. Veltman	Renormierung

2 Spezielle Relativitätstheorie

Wir rufen uns nochmal die Definition eines Inertialsystems in Erinnerung: Dies ist ein Bezugssystem, in dem sich ein Körper, auf dem keine Kraft wirkt, mit konstanter Geschwindigkeit entlang gerader Linien bewegt.

Wir hatten in der klassischen Mechanik das Galileische Relativitätsprinzip kennengelernt: Naturgesetze gelten in jedem Inertialsystem in gleicher Form.

Wir hatten außerdem gelernt, daß in der Newtonschen Mechanik ein Intertialsystem aus einem anderen Inertialsystem durch eine Galileitransformation hervorgeht. Dies waren Raum- und Zeittranslationen, Rotationen des Raumes, Zeitumkehr, Raumspiegelung und Transformationen, in denen sich ein Inertialsystem gegenüber dem anderen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Betrachten wir die letzteren etwas genauer: Bewegt sich das System S' gegenüber dem System S mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_0$, so transformieren sich die Zeit- und Ortskoordinaten wie folgt

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}_0 t. \end{aligned}$$

Betrachten wir ein Teilchen, daß sich im System S' mit Geschwindigkeit $\vec{v}_1'$ bewegt. Im System S gilt dann

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_0,$$

d.h. die Geschwindigkeiten addieren sich. Diese Beziehung kann man nun experimentell überprüfen. Man findet, daß diese Beziehung für kleine Geschwindigkeiten in der Tat experimentell verifiziert wird. Betrachtet man hingegen Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit, so stellt man fest, daß diese Beziehung modifiziert werden muss. Insbesondere findet man, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen den Wert

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}$$

hat. Damit kann eine einfache Addition der Geschwindigkeiten natürlich nicht richtig sein.

Darüberhinaus findet man, daß in jedem Inertialsystem die maximale Signalausbreitungsgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Auch dies steht im Widerspruch zur Newtonschen Mechanik. In der Newtonschen Mechanik geht man davon aus, daß eine Änderung der Position eines Teilchens am Orte $\vec{x}_1$ das Kraftfeld am Orte $\vec{x}_2$ instantan beeinflußt. Auch diese Aussage muß modifiziert werden. Man stellt fest, daß eine Beeinflußung frühestens nach einer Zeit

$$\Delta t = \frac{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}{c}$$

auftritt.

2.1 Postulate

Die spezielle Relativitätstheorie von A. Einstein (1905) basiert auf den folgenden zwei Postulaten:

1. Die Gesetze der Mechanik sind in allen Inertialsystemen gleich.

2. Die Signalgeschwindigkeit ist gleich der Lichtgeschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit ist endlich und hat in jedem Inertialsystem den gleichen Wert c.

Bemerkung: Wir erhalten die klassische Mechanik durch den Grenzfall $c \to \infty$. In der Newtonschen Mechanik ist die Signalausbreitung instantan, also $c = \infty$. Außerdem werden wir später feststellen, daß sich im Grenzfall $v_1, v_2 \ll c$ die Formel der speziellen Relativitätstheorie für die Addition zweier Geschwindigkeiten auf die einfache Addition der Newtonschen Mechanik reduziert.

Wir bemerken gleich zu Beginn, daß eine endliche Signalausbreitungsgeschwindigkeit wichtige Konsequenzen für das Konzept der Zeit hat: In der Newtonschen Mechanik unterscheidet sich die Zeitkoordinate in verschiedenen Inertialsystemen höchstens durch eine Zeittranslation und der Zeitumkehrtransformation. In allen Fällen gilt aber im Rahmen der Newtonschen Mechanik: Finden in einem Inertialsystem S zwei Ereignisse an den Orten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ gleichzeitig zu der Zeit $t = t_1 = t_2$ statt, so finden diese Ereignisse auch in allen anderen Initialsystemen, die aus S durch eine Galileitransformation hervorgehen, zu einer gleichen Zeit statt. Diese Aussage gilt in der speziellen Relativitätstheorie nicht mehr, wie die folgende Überlegung zeigt: Wir betrachten zwei Inertialsysteme S und S', wobei sich S' gegebüber S mit konstanter Geschwindigkeit v entlang der x-Achse bewegt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen die beiden Koordinatensysteme zusammenfallen. Wir betrachten nun im System S' zwei Raumpunkte, die vom Urpsrung gleichweit entfernt sind, wobei der erste Raumpunkt A auf der positiven x-Achse mit den Koordinaten $\vec{x}'_1 = (l, 0, 0)$ liegt, während der zweite Raumpunkt B auf der negativen x-Achse mit den Koordinaten $\vec{x}'_2 = (-l, 0, 0)$ liegt. Senden wir zu der Zeit $t' = 0$ ein Lichtsignal vom Ursprung in alle Richtungen aus, so erreicht dieses Signal im System S' die Punkte A und B gleichzeitig. Im System S dagegen wird das Lichtsignal den Punkt B früher erreichen als den Punkt A. Wir sehen also, daß der Begriff der Gleichzeitigkeit in der speziellen Relativitätstheorie abhängig vom gewählten Bezugssystem ist.

2.2 Abstand, Metrik und Vierervektoren

In der speziellen Relativitätstheorie ist ein Ereignis durch den Ort an dem es stattfindet und durch den Zeitpunkt an dem es geschieht charakterisiert. Wir können also ein Ereignis durch die Angabe von drei Ortskoordinaten und einer Zeitkoordinate in einem vier-dimensionalen Raum beschreiben.

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme S und S', die sich möglicherweise gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Wir betrachten zunächst im System S ein erstes Ereignis, das darin besteht daß vom Punkt (x_1, y_1, z_1) zur Zeit t_1 ein Lichtsignal ausgesandt wird.

Dieses Signal trifft zur Zeit t_2 am Punkt (x_2, y_2, z_2) ein (Ereignis 2). Da sich das Signal mit Geschwindigkeit c ausbreitet, hat es die Entfernung

$$c(t_2 - t_1)$$

zurückgelegt. Anderseits ist die Entfernung natürlich

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Daher gilt:

$$c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \quad = \quad 0.$$

In S' seien die Koordinaten des ersten Ereignisses x'_1, y'_1, z'_1, t'_1 und die des zweiten Ereignisses x'_2, y'_2, z'_2, t'_2. Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit gilt auch in diesem System

$$c^2(t'_1 - t'_2)^2 - (x'_1 - x'_2)^2 - (y'_1 - y'_2)^2 - (z'_1 - z'_2)^2 \quad = \quad 0.$$

Diese Gleichungen motivieren die folgende Definition: Sind x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 die Koordinaten von zwei beliebigen Ereignissen, so heißt die Größe

$$s_{12}^2 \quad = \quad c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

das Abstandsquadrat zwischen diesen beiden Ereignissen.
Bemerkung: Wie man unmittelbar sieht, kann nach dieser Definition das Abstandsquadrat positiv, negativ oder Null sein. Das Abstandsquadrat ist Null, falls die beiden Ereignisse durch einen Lichtstrahl verbunden werden können.
Wir verwenden die folgenden Sprechweisen:

$s_{12}^2 > 0$ zeitartiger Abstand;

$s_{12}^2 < 0$ raumartiger Abstand;

$s_{12}^2 = 0$ lichtartiger Abstand;

Aus den obigen Überlegungen bezüglich der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit in den Systemen S und S' folgt: Verschwindet das Abstandsquadrat zwischen zwei Ereignissen in einem Bezugssystem, so auch in allen anderen.
Es gilt sogar die folgende allgemeinere Behauptung: Das Abstandsquadrat zwischen zwei Ereignissen ist in allen Bezugssytemen gleich.
Beweis: Wir unterteilen das endliche Intervall zwischen der Ereignissen 1 und 2 in unendlich viele infinitessimale Intervalle und zeigen zunächst, daß das infinitessimale Abstandsquadrat in allen Inertialsystemen gleich ist. Sind zwei Ereignisse infinitessimal benachbart, so ist das Abstandsquadrat

$$ds^2 \quad = \quad c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Gilt $ds = 0$ in einem Inertialsystem, so verschwindet ds' in einem anderen System ebenfalls. ds und ds' sind infinitessimale Größen gleicher Ordnung. Aus diesen beiden Umständen folgt, daß sie zueinander proportional sein müssen:

$$ds^2 \;=\; a\, ds'^2$$

Die Proportionalitätskonstante a kann nicht von den Raum- und Zeitkoordinaten abhängen, da dies der Homogenität von Raum und Zeit widersprechen würde. a kann auch nicht von der Richtung der Relativgeschwindigkeit anhängen, da dies im Widerspruch zur Isotropie des Raumes stehen würde. Daher kann a nur vom Betrag der Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme abhängen. Betrache die Bezugsysteme S, S_1 und S_2. Sei $\vec{v}_1$ die Geschwindigkeit von S_1 relativ zu S, $\vec{v}_2$ die Geschwindigkeit von S_2 relativ zu S und $\vec{v}_{12}$ die Geschwindigkeit von S_2 relativ zu S_1. Dann gilt

$$ds^2 = a(v_1)ds_1^2, \quad ds^2 = a(v_2)ds_2^2, \quad ds_1^2 = a(v_{12})ds_2^2,$$

und daher

$$\frac{a(v_2)}{a(v_1)} \;=\; a(v_{12}).$$

Nun hängt v_{12} auch vom Winkel zwischen $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ ab, die linke Seite dagegen nicht. Daher muß $a(v)$ gleich einer Konstanten sein, die wie aus derselben Gleichung folgt, gleich 1 sein muß. Daher

$$ds^2 \;=\; ds'^2,$$

und aus der Gleichheit infinitesimaler Abstände folgt auch die endlicher Abstände:

$$s^2 \;=\; s'^2.$$

Wir bemerken noch, daß zwei Ereignisse nur dann kausal miteinander verbunden sein können, falls der Abstand zwischen ihnen ≥ 0 ist. Dies folgt unmittelbar daraus, daß sich keine Wirkung mit einer Geschwindigkeit ausbreiten kann, die größer als die des Lichtes ist. Man kann dies auch graphisch darstellen. Hierbei verwendet man der Einfachheit halber oft nur $1+1$-Raum-Zeit-Dimensionen. Die Zeit (multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit) wird nach oben aufgetragen, der Ort nach rechts. Dies ist in Abbildung 1 gezeigt. Ein Teilchen das ruht, wird durch eine senkrechte Gerade $x = \text{const}$ beschrieben. Im Allgemeinen wird in diesem Diagramm ein Teilchen durch eine **Weltlinie** beschrieben. Die Weltlinie eines Teilchens gibt zu jeder Zeit den Ort des Teilchens an. Da sich ein Teilchen höchsten mit Lichtgeschwindigkeit bewegen kann, folgt für die graphische Darstellung einer Weltlinie, daß der Betrage der Steigung einer Weltlinie nie kleiner als 1 ist.

Wir betrachten noch alle Punkte, die vom Ursprung einen lichtartigen Abstand haben. In $1+1$-Raum-Zeit-Dimensionen sind dies alle Punkte, die auf den beiden gezeigten Diagonalen in Abbildung 1 liegen. In $2+1$-Raum-Zeit-Dimensionen sind dies alle Punkte, die auf einem Kegelmantel liegen. In $3+1$-Raum-Zeit-Dimensionen sind dies alle Punkte, für die

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \;=\; 0$$

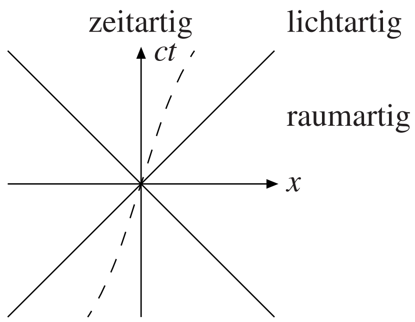

Abbildung 1: Darstellung zeitartiger, raumartiger und lichtartiger Abstände in $1+1$ Raum-Zeit-Dimensionen. Die gestrichelte Kurve zeigt die Weltlinie eines Teilchens.

gilt. In Anlehnung an die Situation in $2+1$-Dimensionen spricht man von der Menge dieser Punkte als die Menge der Punkte die auf dem **Lichtkegel** liegen. Gilt

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad > \quad 0,$$

so sagt man, daß dieser Punkt im Lichtkegel liegt. Ist darüberhinaus $t > 0$, so spricht man vom Vorwärtslichtkegel, ist dagegen $t < 0$, so spricht man vom Rückwärtslichtkegel. Es ist nun unmittelbar einsichtig, daß ein Ereigniss im Ursprung nur die Raum-Zeit-Punkte beeinflussen kann, welche im oder auf dem Vorwärtslichtkegel liegen.

Es ist naheliegend, ein Ereigniss, welches durch die Angabe einer Zeitkoordinate und durch drei Raumkoordinaten beschrieben wird, als einen Punkt in einem vier-dimensionalen Raum zu betrachten. Diesen Raum bezeichnet man als die **Raumzeit**. Man faßt die Koordinaten(ct, x, y, z) eines Ereignisses zu einem Vektor zusammen, der als **Vierervektor** bezeichnet wird. Es ist üblich die Zeitkoordinate mit der Lichtgeschwindigkeit zu multiplizieren, so daß alle Einträge die gleiche Dimension bezüglich der Einheiten haben.
Die Komponenten eines Vierervektors werden von 0 bis 3 durchnummeriert und mit oberen Indizes geschrieben:

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Man verwendet griechische Indices $\mu, \nu, ...$, die die Werte $0,1,2,3$ annehmen, um die Komponenten eines Vierervektors zu bezeichnen:

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, x^1, x^2, x^3) \\ &= (x^0, \vec{x}). \end{aligned}$$

Lateinische Indizes $i, j, ...$ werden verwendet, um die Komponenten eines räumlichen Dreiervektors zu bezeichnen. Sie nehmen die Werte $1,2,3$ an.

Das Abstandsquadrat zweier Ereignisse x_a und x_b ist:

$$s_{ab}^2 \quad = \quad (x_a^0 - x_b^0)^2 - (x_a^1 - x_b^1)^2 - (x_a^2 - x_b^2)^2 - (x_a^3 - x_b^3)^2.$$

Wir definieren den **metrischen Tensor** $g_{\mu\nu}$ durch

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das Abstandsquadrat läßt sich dann schreiben als:

$$s_{ab}^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} \left(x_a^\mu - x_b^\mu\right) \left(x_a^\nu - x_b^\nu\right).$$

Einsteinsche Summenkonvention: Solche Summen werden üblicherweise unter Fortlassung des Summenzeichens geschrieben. Allgemein soll die Regel gelten, daß über Indizes, die paarweise auftreten, summiert wird, das Summationszeichen aber nicht aufgeschrieben wird. Dabei muß in jedem Paar der eine Index oben stehen, der andere unten stehen.
Also:

$$s_{ab}^2 = g_{\mu\nu} \left(x_a - x_b\right)^\mu \left(x_a - x_b\right)^\nu.$$

Wir nennen einen Vierervektor x^μ mit einem oberen Index einen **kontravarianten Vektor**, ein Vierervektor x_μ mit einem unteren Index wird **kovarianter Vektor** genannt. Der Zusammenhang zwischen ko- und kontra-varianten Vektoren ist durch

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

gegeben. Damit hat man

$$\begin{aligned} \text{kontravariant}: \quad & x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right), \\ \text{kovariant}: \quad & x_\mu = \left(x_0, x_1, x_2, x_3\right) = \left(x^0, -x^1, -x^2, -x^3\right). \end{aligned}$$

Somit läßt sich das Abstandsquadrat auch schreiben als

$$s_{ab}^2 = \left(x_a - x_b\right)_\mu \left(x_a - x_b\right)^\mu = \left(x_a - x_b\right)^\mu \left(x_a - x_b\right)_\mu.$$

Wir definieren noch den **inversen metrischen Tensor** $g^{\mu\nu}$ durch

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist $g^{\mu\nu}$ durch

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Aus $x_\nu = g_{\nu\rho} x^\rho$ folgt nun durch Multiplikation mit $g^{\mu\nu}$ (und Summation über ν, so daß dies einer Matrizenmultiplikation entspricht) die Umrechnungsformel eines kovarianten Vektors in einen kontravarianten Vektor:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu.$$

Wir fassen zusammen: Die Umrechnung von kontravarianten und kovarianten Vektor geschieht durch

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu.$$

Man sagt auch, daß mittels des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ bzw. des inversen metrischen Tensors $g^{\mu\nu}$ die Indizes nach unten bzw. nach oben gezogen werden können. Dies gilt auch für Objekte mit mehreren Indizes. So ist zum Beispiel

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = g^{\mu_1\nu_1} g^{\mu_2\nu_2} g^{\mu_3\nu_3} g^{\mu_4\nu_4} \varepsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}.$$

Objekte mit r Indizes bezeichnet man als Tensoren r-ter Stufe und werden später noch ausführlicher diskutiert.

Bemerkung: Die durch die quadratische Form $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ definierte Geometrie ist keine euklidische Geometrie. Man nennt sie pseudoeuklidische Geometrie. Der spezielle Fall eines vierdimensionalen Raumes mit der Metrik $\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ wird auch als Minkowski-Raum bezeichnet.

2.3 Die Lorentztransformation

Gesucht: Formel, die es uns gestattet, aus den Koordinaten x, y, z, t eines Ereignisses in einem Bezugssystem S die Koordinaten x', y', z', t' desselben Ereignisses in einem anderen Inertialsystem S' zu berechnen.

Insbesondere suchen wir die in der speziellen Relativitätstheorie korrekte Transformationsformel für den Fall, daß sich das System S' mit konstanter Geschwindigkeit gegenüber dem System S bewegt. Nehmen wir an, daß sich das System S' mit der Geschwindigkeit v entlang der x-Achse gegenüber dem System S bewegt. Wir rufen nochmals in Erinnerung, daß die Galilei-Transformation

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

zum Widerspruch führt, da in diesem Fall sich die Geschwindigkeiten addieren würden.

Um die korrekte Transformation zu finden, nutzen wir aus, daß das Abstandsquadrat vom Bezugssystem unabhängig ist:

$$s_{ab}^2 = g_{\mu\nu} (x_a - x_b)^\mu (x_a - x_b)^\nu .$$

Die gesuchten Koordinatentransformationen müssen also dieses Abstandsquadrat invariant lassen. Man sieht sofort, daß die Operationen der Zeitranslation, der Ortstranslation, der Zeitumkehr sowie der Raumspiegelung das Abstandsquadrat invariant lassen. Diese Operationen ändern sich beim Übergang von der Newtonschen Mechanik zu der speziellen Relativitätstheorie nicht. Das gleiche gilt auch für Drehungen der Ortskoordinaten. Betrachten wir den Fall, daß das System S' gegenüber dem System S in den Ortskoordinaten um den Winkel φ um die z-Achse gedreht ist, so lautet die Transformation

$$\begin{aligned}
x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\
y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\
z' &= z, \\
t' &= t.
\end{aligned}$$

Betrachten wir das Abstandsquadrat des Punktes (ct, x, y, z) vom Ursprung, so läß diese Transformation das Abstandsquadrat

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

invariant, da

$$x'^2 + y'^2 = x^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + y^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = x^2 + y^2.$$

Hier haben wir eine Drehung in der x-y-Ebene betrachtet. Gleiches gilt für die beiden anderen unabhängigen Drehungen in der x-z-Ebene bzw. in der y-z-Ebene.

In der vier-dimensionalen Raumzeit suchen wir nun zunächst ein Analogon dieser Drehungen in der t-x-Ebene. Diese Transformation soll die y- und die z-Koordinaten invariant lassen. Gesucht ist also eine Transformation der Koordinaten t und x, welche

$$c^2t^2 - x^2$$

invariant läßt. Aufgrund der pseudo-euklidischen Metrik mit negativen Vorzeichen erhalten wir hier hyperbolische trigometrische Funktionen:

$$\begin{aligned}
ct' &= ct\cosh\phi - x\sinh\phi, \\
x' &= -ct\sinh\phi + x\cosh\phi.
\end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Transformation tatsächlich die gewünschte Eigenschaft hat:

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2\left(\cosh^2\phi - \sinh^2\phi\right) - x^2\left(\cosh^2\phi - \sinh^2\phi\right) = c^2t^2 - x^2.$$

Man schreibt diese Transformation in Viererschreibweise auch als

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu},$$

mit

$$\Lambda^\mu{}_\nu \quad = \quad \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog gibt es zwei weitere Transformation in der t-y-Ebene und in der t-z-Ebene.

Bestimmung von ϕ: Betrachte hierzu den Koordinatenursprung des Systems S' im System S:

$$0 \quad = \quad -ct\sinh\phi + x\cosh\phi.$$

und daher

$$\tanh\phi \quad = \quad \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}.$$

Somit

$$\sinh\phi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Im Grenzfall $v \ll c$ gilt

$$\sinh\phi = \frac{v}{c} + O\left(\frac{v^3}{c^3}\right), \qquad \cosh\phi = 1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right),$$

und somit erhält man in diesem Grenzfall die Galilei-Transformation zurück:

$$\begin{aligned} t' &= t + O\left(\frac{1}{c^2}\right), \\ x' &= x - vt + O\left(\frac{1}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Übliche Abkürzungen:

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Damit lassen sich die Koordinatentransformation und die Rücktransformation wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \beta\gamma x, & ct &= \gamma ct' + \beta\gamma x', \\ x' &= -\beta\gamma ct + \gamma x, & x &= \beta\gamma ct' + \gamma x'. \end{aligned}$$

Die obige Koordinatentransformation in der t-x-Ebene bezeichnet man als einen **Lorentz-Boost**. Darüberhinaus gibt es die entsprechenden Transformationen für die t-y-Ebene und die t-z-Ebene.

2.4 Die Lorentz- und die Poincaré-Gruppe

In der Newtonschen Mechanik hatten wir die Galilei-Gruppe als die Gruppe der Koordinatentransformationen betrachtet, die die Gesetze der Newonschen Mechanik invairant lassen. Wir übertragen dies nun auf die spezielle Relativitätstheorie. Die entsprechende Gruppe in der speziellen Relativitätstheorie bezeichnet man als die Poincaré-Gruppe. Im wesentlichen müssen wir hierbei die Galilei-Transformation zwischen zwei zueinander bewegten Bezugssystemen durch einen Lorentz-Boost ersetzen. Wir haben bereits gesehen, daß sich ein Lorentz-Boost und eine Drehung einfach durch eine Matrizenmultiplikation schreiben lassen. Die Untergruppe der Poincaré-Gruppe, die sich durch Matrizenmultiplikation darstellen läß bezeichnet man als die Lorentz-Gruppe.

Wir beginnen mit der Definition der **Lorentzgruppe**: Dies ist die Matrixgruppe von 4×4-Matrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$, welche den metrischen Tensor $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ invariant läßt:

$$\Lambda^T g \Lambda = g,$$

oder, etwas ausführlicher mit Indizes:

$$\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\tau = g_{\sigma\tau}.$$

Diese Definition hat die folgende Motivation: Die Matrix $\Lambda^\mu{}_\nu$ definiert eine Koordinatentransformation

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Für das Skalarprodukt zweier Vierervektoren gilt

$$x' \cdot y' = x'^\mu g_{\mu\nu} y'^\nu = \left(\Lambda^\mu{}_\sigma\, x^\sigma\right) g_{\mu\nu} \left(\Lambda^\nu{}_\tau\, y^\tau\right) = x^\sigma \left(\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\tau\right) y^\tau = x^\sigma g_{\sigma\tau} y^\tau = x \cdot y.$$

Ein Element der Lorentz-Gruppe läßt also das Minkowski-Skalarprodukt zwischen zwei Vierervektoren invariant. Diese Lorentz-Gruppe wird auch mit $O(1,3)$ bezeichnet. Wie leicht zu sehen ist, gilt

$$(\det \Lambda)^2 = 1,$$

und daher

$$\det \Lambda = \pm 1.$$

Gilt zusätzlich $\det \Lambda = 1$ bezeichnet man die Gruppe mit $SO(1,3)$ und spricht von der **eigentlichen Lorentzgruppe**.

Eine weitere Unterscheidung ergibt sich dadurch, ob die Zeitrichtung erhalten bleibt oder umgekehrt wird. Gilt

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1,$$

so ist die Zeitrichtung erhalten und man spricht von der **orthochronen Lorentzgruppe**. Gilt dagegen

$$\Lambda^0{}_0 \leq -1,$$

so wird die Zeitrichtung umgekehrt.
Bemerkung:

$$\left|\Lambda^0{}_0\right| \geq 1$$

folgt aus $\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\tau = g_{\sigma\tau}$ für $\sigma = \tau = 0$:

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \sum_{j=1}^{3} \left(\Lambda^j{}_0\right)^2 = 1.$$

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die Lorentzgruppe aus vier Komponenten besteht, jenachdem welche Werte

$$\det \Lambda \quad \text{und} \quad \Lambda^0{}_0$$

annehmen. Hiervon ist die **eigentliche orthochrone Lorentzgruppe**, definiert durch

$$\Lambda^\mu{}_\sigma g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\tau = g_{\sigma\tau}, \quad \det \Lambda = 1, \quad \Lambda^0{}_0 \geq 1,$$

am interessantesten. Die drei anderen Komponenten lassen sich durch ein Element der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe und den beiden diskreten Transformationen der Zeitumkehr

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und der Raumspiegelung

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

darstellen.

Die **Poincaré-Gruppe**: Die Poincaré-Gruppe besteht aus den Elementen der Lorentzgruppe und den Translationen. Die Koordinaten transformieren sich wie folgt

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu.$$

Die Poincaré-Gruppe wird durch zehn kontinuierliche Parameter (3 Lorentz-Boosts, 3 räumliche Drehungen und 4 Translationen) und zwei diskrete Transformationen (Zeitumkehr und Raumspiegelung) beschrieben.

2.5 Die Längenkontraktion

Wir betrachten zwei Inertialsysteme S und S', wobei S' sich mit konstanter Geschwindigkeit v gegenüber S längs der x-Achse bewegt. Der Ursprung und die Orientierung der Achsen sei in beiden Systemen S und S' gleich.

Im System S' ruht ein Stab der Länge l'. Er liege entlang der x'-Achse, wobei sich der Anfangs- bzw. Endpunkt des Stabes bei $x' = 0$ bzw. $x' = l'$ befindet.

Die Koordinaten in S und S' gehen durch einen Lorentzboost auseinander hervor:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \beta\gamma x, \qquad & ct &= \gamma ct' + \beta\gamma x', \\ x' &= -\beta\gamma ct + \gamma x, \qquad & x &= \beta\gamma ct' + \gamma x', \end{aligned}$$

wobei

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Wir wollen nun die Stablänge im System S bestimmen. Hierzu betrachten wir die Position des Anfangs- und des Endpunktes des Stabes im System S zu ein und demselben Zeitpunkt t in S. Betrachten wir zunächst den Anfangspunkt des Stabes mit den Koordinaten t' und $x' = 0$ in S'. Dieser Punkt hat in S die Koordinaten

$$x_A = \beta\gamma ct', \qquad ct = \gamma ct'.$$

Somit ergibt sich für die Weltlinie des Anfangspunktes in S:

$$x_A(t) \;=\; \beta ct = vt.$$

Als nächstes betrachten wir den Endpunkt. In S' hat dieser die Koordinaten t' und $x' = l'$. In S findet man

$$x_B = \beta\gamma ct' + \gamma l', \qquad ct = \gamma ct' + \beta\gamma l'.$$

Für die Weltlinie des Endpunktes findet man daher im System S

$$x_B(t) \;=\; \beta\left(ct - \beta\gamma l'\right) + \gamma l' = vt + \gamma\left(1-\beta^2\right) l' = vt + \frac{l'}{\gamma}.$$

Somit hat der Stab im System S die Länge

$$l \;=\; x_B(t) - x_A(t) = \frac{l'}{\gamma} = l'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Der Stab erscheint also im System S um den Faktor $\sqrt{1-v^2/c^2}$ verkürzt. Dies bezeichnet man als die **Längenkontraktion**.

2.6 Die Zeitdilatation

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme S und S', wobei S' sich mit konstanter Geschwindigkeit v gegenüber S längs der x-Achse bewegt. Der Ursprung und die Orientierung der Achsen sein in beiden Systemen S und S' gleich.

Im System S befinden sich ruhend entlang der x-Achse eine Anzahl von Uhren, die miteinander synchronisiert sind.

Wir betrachten nun eine weitere Uhr, die im System S' im Ursprung ruht und daher sich im System S mit konstanter Geschwindigkeit entlang der x-Achse bewegt. Diese Uhr wird zum Zeitpunkt $t_0 = t_0' = 0$ mit der Uhr die sich ruhend im Urpsrung des Systems S befindet synchronisiert.

Betrachten wir zunächst die Uhr im System S. Da sie sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, hat sie zum Zeitpunkt t_1 den Ort $x_1 = vt_1$ erreicht.

Andererseits ruht die Uhr im System S'. Der Raumzeitpunkt (ct_1, x_1) im System S hat also im System S' die Koordinaten $(ct_1', 0)$. Wir möchten nun t_1' bestimmen. Aus der Invarianz des Abstandsquadrates folgt

$$c^2 t_1^2 - x_1^2 \quad = \quad c^2 {t_1'}^2,$$

und somit

$$t_1' \quad = \quad t_1 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{c^2 t_1^2}} = t_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Die bewegte Uhr zeigt also eine um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ verkürzte Zeit an. In anderen Worten: Bewegte Uhren gehen langsamer. Diesen Effekt bezeichnet man als **Zeitdilatation**.

Wir können dies etwas verallgemeinern und eine Uhr betrachten die sich beliebig bewegt (nicht notwendiger Weise mit konstanter Geschwindigkeit). Sei S' das Koordinatensystem, in dem die Uhr ruht. Dies ist dann nicht notwendigerweise ein Inertialsystem. Die Bewegung der Uhr können wir näherungsweise durch eine Sequenz geradliniger-gleichförmiger Bewegungen beschreiben. In einem Inertialsystem S legt die Uhr in einem infinitessimalen Zeitintervall dt die Strecke

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

zurück. Gefragt wird, welches Zeitintervall dt' sie danach anzeigt. Aus der Invarianz des Abstandes folgt:

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad = \quad c^2 dt'^2$$

und daher

$$dt' \quad = \quad dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2 dt^2}} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Integration liefert für eine beliebige Bewegung

$$t_1' = \int_0^{t_1} dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

wobei wir $t_0' = t_0 = 0$ gesetzt haben. Man bezeichnet t_1' als die **Eigenzeit** der Uhr bzw. des Systems S'. Man verwendet oft den Buchstaben τ für die Eigenzeit. Für die infinitessimale Größe gilt

$$d\tau = dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Durch Multiplikation mit c rechnet man auf eine Größe mit der Dimension einer Länge um:

$$s = c\tau.$$

Ebensogilt für die infinitessimale Größe

$$ds = c d\tau = c dt \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Bemerkung 1: Die Eigenzeit eines sich bewegenden Gegenstandes ist immer kleiner als das entsprechende Zeitintervall im unbewegten System.

Bemerkung 2: Die ist kein Widerspruch zum Relativitätsprinzip, da zum Vergleich eine Uhr im "bewegten" System, aber mehrere Uhren im "unbewegten" System notwendig sind.

Bemerkung 3: Auch eine Uhr, die auf einer geschlossenen Kurve bewegt wird, stellt keine Widerspruch dar, da sie sich nicht dauernd in einem Inertialsystem befinden kann.

2.7 Transformation der Geschwindigkeit

Das System S' bewege sich relativ zum System S mit der Geschwindigkeit V längs der x-Achse. Die Geschwindigkeit eines Teilchens in S sei

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt},$$

die entsprechenden Größen in S' seien

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'}, \quad v_y' = \frac{dy'}{dt'}, \quad v_z' = \frac{dz'}{dt'},$$

Die infinitessimalen Größen stehen mittels der Lorentztransformation

$$dx = \gamma\left(dx' + V dt'\right), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2} dx'\right)$$

in Verbindung. Divison der ersten drei Gleichungen durch die vierte liefert:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{v'_x V}{c^2})}, \quad v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{v'_x V}{c^2})}.$$

Spezialfall: $v'_x = v'$, $v'_y = v'_z = 0$:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' V}{c^2}}.$$

Die nach dieser Formel berechnete Summe zweier Geschwindigkeiten ist immer kleiner als c.

2.8 Die Vierergeschwindigkeit

Die **Vierergeschwindigkeit** eines Teilchens ist der Vektor

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}.$$

Um die Komponenten zu finden erinnern wir uns, daß

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

wobei v die gewöhnliche dreidimensionale Geschwindigkeit des Teilchens ist. Man findet

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{cdt}{cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Für die räumlichen Komponenten gilt zum Beispiel

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^1}{cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v_x}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

und analoge Beziehungen ergeben sich für u^2 und u^3. Man findet letztendlich das folgende Ergebnis:

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Die Komponenten von u^μ sind nicht unabhängig sondern erfüllen die Relation

$$u^\mu u_\mu = 1.$$

Die Vierergeschwindigkeit läßt sich daher geometrisch als Einheitsvektor auffassen, der die Weltlinie des Teilchens tangiert.

Analog definiert man die **Viererbeschleunigung** durch

$$w^\mu = \frac{d}{ds} u^\mu = \frac{d^2}{ds^2} x^\mu.$$

2.9 Die relativistische Mechanik

In diesem Abschnitt wollen wir die Verallgemeinerung des zweiten Newtonschen Gesetztes

$$\frac{d}{dt}\vec{p} \;=\; \vec{F}$$

im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie betrachten. Wir haben im letzten Abschnitt bereits die Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu \;=\; \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

kennengelernt. Dies legt die folgende Definition des **Viererimpulses** nahe:

$$p^\mu \;=\; m\frac{dx^\mu}{d\tau} = mc\frac{dx^\mu}{ds} = mcu^\mu.$$

Wir erhalten somit

$$p^\mu \;=\; \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Schreiben wir außerdem

$$p^\mu \;=\; (E/c, \vec{p}),$$

wobei E die Gesamtenergie des Teilchens und $\vec{p}$ dessen Dreierimpuls bezeichnet, so gilt

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Wir betrachten diese Ausdrücke für kleine Geschwindigkeiten. Für den Dreierimpuls gilt

$$\vec{p} \;=\; m\vec{v}\left[1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right].$$

Somit geht $\vec{p}$ für kleine Geschwindigkeiten in den nicht-relativistischen Ausdruck $m\vec{v}$ über. Zu beachten ist jedoch daß für Geschwindigkeiten in der Größendordnung der Lichtgeschwindigkeit der Faktor $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ nicht mehr vernachläßigt werden kann. Dies hat zur Folge daß der Impuls $\vec{p}$ stärker als linear mit der Geschwindigkeit anwächst. Man sagt auch, daß die "relativistische" Masse des Teilchens zunimmt:

$$m_{\text{rel}} \;=\; \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Entwickelt man E für kleine Geschwindigkeiten, so findet man

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mc^2 O\left(\frac{v^4}{c^4}\right).$$

Man findet also die nicht-relativistische kinetische Energie $1/2mv^2$ plus einen konstanten Term mc^2, den man als die Ruhenergie des Teilchens bezeichnet. Um m von der relativistischen Masse m_{rel} zu unterscheiden, verwendet man auch den Begriff "Ruhemasse" für m. Befindet sich ein Teilchen in Ruhe ($\vec{v} = 0$), so gilt für die Energie des Teilchens

$$E = mc^2.$$

Dies ist wohl die bekannteste Formel Albert Einsteins.

Aus $u^2 = 1$ und $p^\mu = mcu^\mu$ folgt

$$p^2 = m^2c^2.$$

Setzen wir nun die Komponenten $p^\mu = (E/c, \vec{p})$ ein, so folgt

$$E^2 - \vec{p}^2c^2 = m^2c^4.$$

Dies ist die **relativistische Energie-Impuls-Beziehung**.

Die relativistische Verallgemeinerung des zweiten Newtonschen Gesetzes lautet:

$$\frac{d}{d\tau}p^\mu = K^\mu,$$

wobei man K^μ als **Viererkraft** bezeichnet. Für die räumlichen Komponenten der Viererkraft gilt

$$K^i = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}F^i.$$

Für kleine Geschwindigkeiten gilt also wieder

$$K^i = F^i + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Eine Beziehung für die nullte Komponente der Viererkraft findet man durch die Kontraktion der Bewegungsgleichung mit der Vierergeschwindigkeit: Es ist

$$u_\mu \frac{d}{d\tau}p^\mu = u_\mu \frac{d}{d\tau}mcu^\mu = \frac{1}{2}mc\frac{d}{d\tau}u_\mu u^\mu = 0,$$

und somit

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(K^0 - \frac{1}{c}\vec{v}\vec{K}\right) = 0.$$

Also folgt

$$K^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{c}.$$

Somit ist

$$K^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{F}, \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \vec{F} \right).$$

Wir fassen nun zusammen: Die relativistische Verallgemeinerung des zweiten Netwonschen Gesetzes ist die Vierervektorengleichung $dp^\mu/d\tau = K^\mu$, wobei p^μ der relativistische Viererimpuls, τ die Eigenzeit und K^μ die Viererkraft ist. Betrachtet man die räumlichen Komponenten und setzt man $p^i = \gamma m v^i$, $d\tau = dt/\gamma$ und $K^i = \gamma F^i$ ein, so findet man

$$\gamma \frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) = \gamma \vec{F},$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} (m_{\mathrm{rel}} \vec{v}) = \vec{F}.$$

In der Bewegungsgleichung ist also die relativistische Masse zu berücksichtigen.

2.10 Tensoren

Sei V ein Vektorraum und G eine Gruppe. Man sagt, G wirkt auf V, falls eine Abbildung gegeben ist,

$$G \times V \to V$$

die

$$g_1 (g_2 v) = (g_1 g_2) v$$

erfüllt. In diesem Fall nennt man V eine Darstellung von G.

Beispiel 1: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $G = GL(n, \mathbb{R})$. Die Abbildung $G \times V \to V$ ist durch die Multiplikation einer Matrix mit einem Spaltenvektor gegeben:

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} v_j$$

Beispiel 2: Sei V der Minkowskiraum und G die Lorentzgruppe.

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad \text{(Einsteinsche Summenkonvention)}$$

Beispiel 3: Sei V ein n^2-dimensionaler Vektorraum und $G = GL(n,\mathbb{R})$. Elemente aus V schreiben wir als v_{ij} mit $1 \leq i,j \leq n$. G wirkt auf V wie folgt:

$$v'_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} M_{ik}M_{jl}v_{kl}$$

Man nennt v_{ij} einen Tensor zweiter Stufe.

Beispiel 4: Sei V ein 16-dimensionaler Raum und G die Lorentzgruppe.

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}T^{\rho\sigma}$$

$T^{\mu\nu}$ ist ein Tensor zweiter Stufe.

Beispiel 5: Sei V ein 64-dimensionaler Raum und G die Lorentzgruppe.

$$T'^{\mu\nu\rho} = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\kappa}\Lambda^{\rho}{}_{\lambda}T^{\sigma\kappa\lambda}$$

$T^{\mu\nu\rho}$ ist ein Tensor dritter Stufe.

Allgemein: Ein **Tensor** ist ein Element eines Vektorraums, auf den eine Gruppenwirkung gegeben ist. Die Anzahl der Kopien des Gruppenelements, die zur Definition der Gruppenwirkung benötigt werden, bezeichnet man als Rang des Tensors.

Pseudotensoren verhalten sich bei allen Transformationen, die sich auf Drehungen zurückführen lassen, wie Tensoren. Sie verhalten sich allerdings anders bei Spiegelungen (Raumspiegelung, Zeitumkehr), d.h. Transformationen, die sich nicht auf Drehungen zurückführen lassen: Hier unterscheiden sie sich von den Tensoren um ein Minuszeichen.

Pseudotensoren nullter Stufe nennt man Pseudoskalare. Pseudotensoren erster Stufe nennt man auch axiale Vektoren.

In der speziellen Relativitätstheorie unterscheiden wir außerdem zwischen oberen und unteren Indizes (kontravariante und kovariante Komponenten). Der Zusammenhang ist wieder durch den metrischen Tensor bzw. den inversen metrischen Tensor gegeben:

$$T^{\mu}_{\nu} = g_{\nu\rho}T^{\mu\rho}, \quad T_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}T^{\rho\sigma}, \quad T_{\mu}{}^{\nu} = g^{\nu\rho}T_{\mu\rho}, \quad T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}T_{\rho\sigma}.$$

Tensoren mit bestimmten Symmetrieeigenschaften: Ein Tensor zweiter Stufe heißt symmetrisch falls gilt

$$S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$$

Ein Tensor r-ter Stufe heißt symmetrisch, falls er symmetrisch in allen Indexpaaren ist. Ein Tensor zweiter Stufe heißt antisymmetrisch, falls

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$$

gilt. Insbesondere gilt für einen antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe $A^{00} = A^{11} = A^{22} = A^{33} = 0$. Ein Tensor r-ter Stufe heißt antisymmetrisch, falls er antisymmetrisch in allen Indexpaaren ist.

Beispiele für Tensoren in der speziellen Relativitätstheorie:

Rang 1: Ortsvektor x^μ, Impulsvektor p^μ.

Rang 2: Metrischer Tensor $g^{\mu\nu}$.

Rang 4: Total antisymmetrischer Tensor (Levi-Civita-Tensor) $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Der total antisymmetrischer Tensor ist definiert durch

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{0123} &= 1, \\
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= 1 \quad \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma \text{ eine gerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist,} \\
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -1 \quad \text{falls } (\mu, \nu, \rho, \sigma \text{ eine ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \text{ ist,} \\
\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= 0 \quad \text{sonst.}
\end{aligned}$$

Der total antisymmetrische Tensor ist ein Pseudotensor, er ändert bei Raumspiegelung und Zeitumkehr seine Komponenten nicht.

Das Produkt $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ bildet einen Tensor achter Stufe, wobei dieser Tensor echt ist. Durch Verjüngung bezüglich ein oder mehrerer Indexpaare erhalten wir Tensoren sechster, vierter oder zweiter Stufe. Alle diese Tensoren haben dieselbe Gestalt in allen Koordinatensystemen. Daher lassen sie sich durch δ^μ_ν ausdrücken, des einzigen echten Tensors, dessen Komponenten in allen Koordinatensystemen dieselben sind.

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -\begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma & \delta^\mu_\delta \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma & \delta^\nu_\delta \\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma & \delta^\rho_\delta \\ \delta^\sigma_\alpha & \delta^\sigma_\beta & \delta^\sigma_\gamma & \delta^\sigma_\delta \end{vmatrix}, \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma} &= -\begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta & \delta^\mu_\gamma \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta & \delta^\nu_\gamma \\ \delta^\rho_\alpha & \delta^\rho_\beta & \delta^\rho_\gamma \end{vmatrix}, \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} &= -2\begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\mu_\beta \\ \delta^\nu_\alpha & \delta^\nu_\beta \end{vmatrix}, \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} &= -6\delta^\mu_\alpha, \\
\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -24.
\end{aligned}$$

3 Die Maxwellschen Gleichungen

Wir behandeln nun die Elektrodynamik. Die Elektrodynamik wird durch die Maxwellschen Gleichungen beschrieben. Wir werden die Maxwellschen Gleichungen in drei verschiedenen Formen präsentieren: In der ersten Version schreiben wir die Maxwellschen Gleichungen in der integralen Form auf. Diese Form hat einen direkten Bezug zu den experimentell erwiesenen Fakten und Grundlagen der Elektrodynamik. In einem zweiten Schritt erhalten wir mit Hilfe der Integralsätze von Gauß und Stokes aus der integralen Form die lokale Form der Maxwellschen Gleichungen. In der lokalen Form sieht man, daß die Elektrodynamik durch partielle Differentialgleichungen beschrieben wird. In der dritten und letzten Version der Maxwellschen Gleichungen verbinden wir die Elektrodynamik mit der speziellen Relativitätstheorie und präsentieren die Maxwellschen Gleichungen in einer manifest kovarianten Form.

3.1 Die Maxwellschen Gleichungen in integraler Form

Vorbemerkung: Historisch begründet sind die folgenden Bezeichnungen:

elektrische Feldstärke	$\vec{E}$
magnetische Induktion (magnetische Flußdichte)	$\vec{B}$
dielektrische Verschiebung	$\vec{D}$
magnetische Feldstärke	$\vec{H}$

Der Zusammenhang zwischen $\vec{D}$ und $\vec{E}$, bzw. zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$ ist allgemein durch

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

gegeben. Wir werden später sehen, daß im Allgemeinen in polarisierbaren Medien bzw. magnetisierbaren Medien ε und μ (3×3)-Matrizen sein können. Im (wichtigen) Spezialfall, in dem sich ε und μ auf Vielfache der Einheitsmatrix reduzieren, betrachtet man sie der Einfachheit halber als skalare Größen und bezeichnet ε als **Dielektrizitätskonstante** und μ als **Permeabilität**. Im Vakuum verwendet man die Notation ε_0 und μ_0. Man nennt ε_0 die **elektrische Feldkonstante** bzw. die **Influenzkonstante** und man nennt μ_0 die **magnetische Feldkonstante** bzw. die **Induktionskonstante**. In der theoretischen Physik verwendet man oft das **Gaußsche Maßsystem**. Im Gaußschen Maßsystem setzt man

$$\varepsilon_0 = 1, \qquad \mu_0 = 1, \qquad \text{(Gaußsches Maßsystem)}$$

so daß wir im Gaußschen Maßsystem im Vakuum den Zusammenhang

$$\vec{D} = \vec{E}, \qquad \vec{H} = \vec{B}, \qquad \text{(Gaußsches Maßsystem)}$$

haben. Im SI-System gilt hingegen im Vakuum:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu_0\vec{H}, \qquad \text{(SI-System)}$$

wobei ε_0 und μ_0 die Werte

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \mathrm{C\,V^{-1} m^{-1}}, \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \mathrm{VsA^{-1} m^{-1}}, \qquad \text{(SI-System)}$$

haben. Die folgende Tabelle liefert einen Vergleich zwischen dem Gauß-System und dem SI-System:

	Gauß-System	SI-System	Vergleich
Länge	1 cm	1 m	$1\ \mathrm{m} = 1 \cdot 10^2\ \mathrm{cm}$
Masse	1 g	1 kg	$1\ \mathrm{kg} = 1 \cdot 10^3\ \mathrm{g}$
Zeit	1 s	1 s	
Kraft	1 dyn	1 N	$1\ \mathrm{N} = 1 \cdot 10^5\ \mathrm{dyn}$
Energie	1 erg	1 J	$1\ \mathrm{J} = 1 \cdot 10^7\ \mathrm{erg}$
Leistung	1 erg/s	1 W	$1\ \mathrm{W} = 1 \cdot 10^7\ \mathrm{erg\ s^{-1}}$
Ladung	1 esu	1 C	$1\ \mathrm{C} = 3 \cdot 10^9\ \mathrm{esu}$
Stromstärke	1 esc	1 A	$1\ \mathrm{A} = 3 \cdot 10^9\ \mathrm{esc}$
Potential	1 esv	1 V	$1\ \mathrm{V} = 1/300\ \mathrm{esv}$
Elektrisches Feld	1 esv/cm	1 V/m	$1\ \mathrm{V\ m^{-1}} = 1/30000\ \mathrm{esv\ cm^{-1}}$
Magnetisches Feld	1 Oersted (Oe)	1 A/m	$1\ \mathrm{A\ m^{-1}} = 4\pi \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Oe}$
Magnetische Induktion	1 Gauß (G)	1 Tesla	$1\ \mathrm{Tesla} = 1 \cdot 10^4\ \mathrm{Gauß}$

Bemerkung: In der Elementarteilchenphysik verwendet man oft ein weiteres Einheitensystem, daß als System der natürlichen Einheiten bezeichnet wird. Hierbei sind die Einheiten so gewählt, daß

$$c = 1, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1$$

gilt. Faktoren von 4π verschwinden, indem sie in die Felder und Quellen absorbiert werden:

$$\vec{E}\Big|_{\mathrm{nat}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,\vec{E}\Big|_{\mathrm{Gauß}}, \qquad \rho|_{\mathrm{nat}} = \sqrt{4\pi}\,\rho|_{\mathrm{Gauß}}\,.$$

3.1.1 Das Induktionsgesetz

Es sei C' eine glatte Kurve endlicher Länge, $d\vec{s} = \hat{t}\,ds$ das Linienelement entlang dieser Kurve und sei $\vec{E}(t,\vec{x})$ ein elektrische Feld. Dann nennt man das Wegintegral

$$\int_{C'} d\vec{s} \cdot \vec{E}(t,\vec{x})$$

die elektromotorische Kraft.

Sei nun $\mathcal{C}$ eine glatte, geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^3$, die eine glatte Fläche A berandet. Wir schreiben auch

$$\partial A \;=\; \mathcal{C},$$

d.h. $\mathcal{C}$ ist der Rand von A. Sei weiter $\hat{n}(t,\vec{x})$ die Flächennormale. Dann ist der magnetische Fluß durch die Fläche A als das Flächenintegral

$$\Phi(t) \;=\; \int_A dS\,\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\hat{n}(t,\vec{x})$$

definiert. Das Faradaysche Induktionsgesetz (1831) verknüpft die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses mit der entlang der Randkurve induzierten elektromotorischen Kraft:

$$\oint_{\mathcal{C}} d\vec{s}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) \;=\; -f_F\frac{d}{dt}\int_A dS\,\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\hat{n}(t,\vec{x})$$

Hierbei ist der geschlossene Weg $\mathcal{C}$ so orientiert, so daß $\hat{n}$ und $\mathcal{C}$ eine Rechtsschraube bilden. Der Faktor f_F ist reell-positiv und hängt von der Wahl der physikalischen Einheiten ab. Im SI-System ist er $f_F = 1$, im Gaußschen Maßsystem ist er $f_F = 1/c$.

Bemerkung: Das negative Vorzeichen der rechten Seite enthält eine physikalische Aussage: die Richtung des in der Kurve $\mathcal{C}$ induzierten Stroms ist derart, dass der von diesem Strom erzeugte magnetische Fluß der zeitlichen Änderung des Flusses der rechten Seite entgegen wirkt. Das ist der Inhalt der Lenzschen Regel.

3.1.2 Das Gaußsche Gesetz

Dielektrische Verschiebung $\vec{D}(t,\vec{x})$: Im Vakuum gilt

$$\vec{D}(t,\vec{x}) \;=\; \vec{E}(t,\vec{x}).$$

In polarisierbaren Medien sind die beiden Vektorfelder über die Relation

$$\vec{D}(t,\vec{x}) \;=\; \varepsilon(\vec{x})\vec{E}(t,\vec{x})$$

verknüpft, wobei $\varepsilon(\vec{x})$ ein Tensor zweiter Stufe ist und die eigenschaften des Mediums – hier seine elektrische Polarisierbarkeit – beschreibt.

Das Gaußsche Gesetz setzt den Fluß der dielektrischen Verschiebung durch eine geschlossene Fläche in Beziehung zur gesamten, durch diese Fläche eingeschlossenen elektrischen Ladung.

Es sei A eine geschlossene glatte Fläche, und V das von A eingeschlossene räumliche Volumen. Es gilt

$$\partial V \;=\; A,$$

d.h. die Fläche A ist der Rand des Volumen V. Wenn $\rho(t,\vec{x})$ eine vorgegebene elektrische Ladungsdichte beschreibt, so gilt

$$\int_A dS\,\vec{D}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; f_G\int_V d^3x\,\rho(t,\vec{x}) = f_G Q_V.$$

Q_V ist die im Volumen V eingeschlossene Gesamtladung. Die Konstante f_G hat den Wert $f_G = 1$ im SI-System und den Wert $f_G = 4\pi$ im Gaußschen Maßsystem.

Anwendung des Gaußschen Gesetzes auf magnetische Ladungen und die von ihnen erzeugte magnetische Induktion: Das Experiment sagt uns, daß es keine freien magnetischen Ladungen gibt. Deshalb hat man

$$\int_A dS\,\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; 0.$$

3.1.3 Das Gesetz von Biot und Savart

Das Gesetz von Biot-Savart (1822): Die Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{x})$ liege ganz im Endlichen und sei ein glattes Vektorfeld. Dann ist das durch diese Verteilung erzeugte Magnetfeld gegeben durch

$$\vec{H}(t,\vec{x}) \;=\; \frac{f_{BS}}{4\pi}\int d^3x'\;\vec{j}(t,\vec{x}')\times\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}.$$

Dieser Ausdruck gilt im Außen- ebenso wie im Innenraum der Quellverteilung $\vec{j}$. $\vec{H}$ und $\vec{B}$ hängen wie folgt zusammen

$$\vec{B}(t,\vec{x}) \;=\; \mu\vec{H}(t,\vec{x}).$$

μ nennt man die magnetische Permeabilität. Im Vakuum gilt $\mu = 1$ (im Gaußschen Maßsystem). Die Konstante f_{BS} hat den Wert $f_{BS} = 1$ im SI-System und den Wert $f_{BS} = 4\pi/c$ im Gaußschen Maßsystem.

3.1.4 Die Lorentz-Kraft

Eine weitere wichtige, vom Experiment bestätigte Erfahrungstatsache steckt im Ausdruck für die Kraftwirkung von beliebigen elektrischen Feldern $\vec{E}(t,\vec{x})$ und Induktionsfeldern $\vec{B}(t,\vec{x})$ auf ein Punktteilchen, das die elektrische Ladung q trägt und sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ relativ zu demjenigen Bezugssystem K bewegt, bezüglich dessen die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ definiert sind:

$$\vec{F}(t,\vec{x}) \;=\; q\left(\vec{E}(t,\vec{x}) + f_F\vec{v}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right).$$

Die Konstante f_F ist wie im Faradayschen Induktionsgesetz definiert.

3.1.5 Die Kontinuitätsgleichung

Eine weitere, fundamental wichtige Aussage ist die Erhaltung der Ladung: Die elektrische Ladung ist unter allen Wechselwirkungen erhalten. In integraler Form läßt sich dieser Sachverhalt wie folgt formulieren: Eine zeitabhängige Ladungsdichte $\rho(t,\vec{x})$, die ganz im Endlichen liegt, und eine von den Bewegungen der in ρ enthaltenen Ladungen erzeugte Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{x})$ seien vorgegeben. Für jede glatte geschlossene Fläche A und dem von ihr eingeschlossenen Volumen V gilt die Bilanzgleichung

$$\int_A dS\,\vec{j}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; -\frac{d}{dt}\int_V d^3x\,\rho(t,\vec{x}).$$

3.1.6 Zusammenfassung der Gleichungen in integraler Form

Faradaysches Induktionsgesetz:

$$\oint_C d\vec{s}\cdot\vec{E}(t,\vec{x}) \;=\; -f_F\frac{d}{dt}\int_A dS\,\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\hat{n}(t,\vec{x})$$

Gaußsche Gesetze:

$$\int_A dS\,\vec{D}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; f_G\int_V d^3x\,\rho(t,\vec{x}) = f_G Q_V.$$

$$\int_A dS\,\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; 0.$$

Biot-Savartsches Gesetz:

$$\vec{H}(t,\vec{x}) \;=\; \frac{f_{BS}}{4\pi}\int d^3x'\,\vec{j}(t,\vec{x}')\times\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}.$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\int_A dS\,\vec{j}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; -\frac{d}{dt}\int_V d^3x\,\rho(t,\vec{x}).$$

Lorentzkraft:

$$\vec{F}(t,\vec{x}) \;=\; q\left(\vec{E}(t,\vec{x}) + f_F\vec{v}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right).$$

3.2 Die Maxwellschen Gleichungen in lokaler Form

Wir erinnern uns an die Sätze von Gauß und Stokes:

Der **Gaußsche Satz** lautet:

$$\int_A d^3x \,\mathrm{div}\vec{F}\,(\vec{x}) \quad = \quad \int_{\partial A} dS\,\hat{n}\,(\vec{x}) \cdot \vec{F}\,(\vec{x})\,.$$

Hierbei ist A ein Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand. Der Rand von A wird mit ∂A bezeichnet. $\hat{n}$ ist das äußere Einheitsnormalenvektorfeld auf dem Rand, d.h. $\hat{n}(\vec{x})$ zeigt vom Rand ∂A nach außen und ist auf Eins normiert. Der Gaußsche Satz besagt, daß das Integral über ein 3-dimensionales Gebiet der Divergenz eines Vektorfeldes gleich dem 2-dimensionalen Integral über dem Rand des Gebietes der Normalkomponente des Vektorfeldes bezüglich des Randes ist.

Der **Satz von Stokes** besagt

$$\int_B dS\,\hat{n}\,(\vec{x}) \cdot \,\mathrm{rot}\vec{F}\,(\vec{x}) \quad = \quad \int_{\partial B} ds\,\hat{t}\,(\vec{x}) \cdot \vec{F}\,(\vec{x})$$

Hierbei ist B eine kompakte Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand. Den Rand wird mit ∂B bezeichnet. Weiter ist $\hat{t}\,(\vec{x})$ der Einheitstangentialvektor im Punkte $\vec{x}$ an den Rand ∂B. Diese Orientierungen sind so korreliert, daß die geschlossene Kurve ∂B die in Richtung von $\hat{t}(\vec{x})$ durchlaufen wird und $\hat{n}$ eine Rechtsschraube bilden.

3.2.1 Das Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz in integraler Form lautet:

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E}(t,\vec{x}) \quad = \quad -f_F \frac{d}{dt} \int_A dS\,\vec{B}(t,\vec{x}) \cdot \hat{n}(t,\vec{x})$$

Wir wenden nun den Stokeschen Satz auf die linke Seite an:

$$\oint_C d\vec{s} \cdot \vec{E}(t,\vec{x}) \quad = \quad \int_A dS \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x})\right) \cdot \hat{n}(t,\vec{x}).$$

Daher

$$\int_A dS \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x})\right) \cdot \hat{n}(t,\vec{x}) \quad = \quad -f_F \frac{d}{dt} \int_A dS\,\vec{B}(t,\vec{x}) \cdot \hat{n}(t,\vec{x})$$

Diese Gleichung gilt für jede Fläche A. Wir können die Fläche auch auf eine Punkt zusammenziehen, daher müssen die Integranden gleich sein:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(t,\vec{x}) \quad = \quad -f_F \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t,\vec{x})$$

Zur Erinnerung: Im SI-System ist $f_F = 1$, im Gaußschen Maßsystem ist $f_F = 1/c$.

3.2.2 Das Gaußsche Gesetz

Das Gaußsche Gesetz für die dielektrische Verschiebung:

$$\int_A dS\,\vec{D}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; f_G \int_V d^3x\,\rho(t,\vec{x}).$$

Wir wenden nun den Gaußschen Satz auf die linke Seite an:

$$\int_A dS\,\vec{D}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; \int_V d^3x\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}).$$

Somit

$$\int_V d^3x\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) \;=\; f_G \int_V d^3x\,\rho(t,\vec{x}).$$

Da das Volumen beliebig ist und seine Oberfläche stetig zusammengezogen werden kann, müssen wieder die Integranden gleich sein.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) \;=\; f_G\rho(t,\vec{x}).$$

Zur Erinnerung: Die Konstante f_G hat den Wert $f_G = 1$ im SI-System und den Wert $f_G = 4\pi$ im Gaußschen Maßsystem.

Aus der Integralform des Gaußschen Gesetzes für das Magnetfeld

$$\int_A dS\,\vec{B}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; 0.$$

folgt analog

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) \;=\; 0.$$

3.2.3 Die Kontinuitätsgleichung

Wir bestimmen zunächst die lokale Form der Kontinuitätsgleichung und wenden uns erst danach dem Gesetz von Biot und Savart zu. Die integrale Form der Kontinuitätsgleichung lautete:

$$\int_A dS\,\vec{j}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; -\frac{d}{dt}\int_V d^3x\,\rho(t,\vec{x}).$$

Wir wenden wieder den Gaußschen Satz auf die linke Seite an:

$$\int_A dS\,\vec{j}(t,\vec{x})\cdot\hat{n} \;=\; \int_V d^3x\,\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}).$$

Es folgt dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x})$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) = 0.$$

3.2.4 Das Gesetz von Biot und Savart

Die integrale Form des Gesetzes von Biot und Savart lautet:

$$\vec{H}(t,\vec{x}) = \frac{f_{BS}}{4\pi} \int d^3x' \; \vec{j}(t,\vec{x}') \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}.$$

Zur Erinnerung: Die Konstante f_{BS} hat den Wert $f_{BS} = 1$ im SI-System und den Wert $f_{BS} = 4\pi/c$ im Gaußschen Maßsystem. Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) = \vec{\nabla}_{x'} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right)$$

Somit

$$\begin{aligned} \vec{H}(t,\vec{x}) &= -\frac{f_{BS}}{4\pi} \int d^3x' \; \vec{j}(t,\vec{x}') \times \vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \\ &= \frac{f_{BS}}{4\pi} \vec{\nabla}_x \times \int d^3x' \; \vec{j}(t,\vec{x}') \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \end{aligned}$$

Der Vorzeichenwechsel kommt von der Vertauschung der Reihenfolge im Vektorprodukt. Nun nimmt man auf beiden Seiten die Rotation und benützt

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{V} \right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) - \Delta \vec{V}.$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H}(t,\vec{x}) &= \frac{f_{BS}}{4\pi} \vec{\nabla}_x \int d^3x' \; \vec{j}(t,\vec{x}') \vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \\ &\quad - \frac{f_{BS}}{4\pi} \int d^3x' \; \vec{j}(t,\vec{x}') \Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) \end{aligned}$$

Im ersten Term verwendet man

$$\vec{\nabla}_x \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) = -\vec{\nabla}_{x'} \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right)$$

Im zweiten Term benutzt man

$$\Delta_x \left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \right) = -4\pi\delta\left(\vec{x}-\vec{x}'\right).$$

Bemerkung: Die Gleichung $\Delta 1/r = -4\pi\delta(r)$ verifiziert man für $r \neq 0$ durch Differentiation. Es handelt sich hier um zwei Distributionen. Das Verhalten am Ursprung überprüft man durch Integration über eine Testfunktion. Man integriert über eine Kugel mit Radius ε und verwendet den zweiten Greenschen Satz.

$$\int\limits_{|x|\leq\varepsilon} d^3x\, f\Delta\frac{1}{r} \;=\; \int\limits_{|x|\leq\varepsilon} d^3x\, \frac{1}{r}\Delta f + \int\limits_{|x|=\varepsilon} d^2S\, f\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} - \int\limits_{|x|=\varepsilon} d^2S\, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}f.$$

Nun ist $d^2S = r^2 d\Omega = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, daher verschwinden der erste und der dritte Term im Grenzfall $\varepsilon \to 0$.

$$\int\limits_{|x|\leq\varepsilon} d^3x\, f\Delta\frac{1}{r} \;=\; \int\limits_{|x|=\varepsilon} d^2S\, f\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} = \varepsilon^2 \int d\Omega\, f(\varepsilon)\cdot\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = -4\pi f(0).$$

Einsetzen der Hilfgleichungen:

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(t,\vec{x}) \;=\; -\frac{f_{BS}}{4\pi}\vec{\nabla}_x \int d^3x'\, \vec{j}(t,\vec{x}')\vec{\nabla}_{x'}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) + f_{BS}\vec{j}(t,\vec{x})$$

Mittels einer partiellen Integration erhält man

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(t,\vec{x}) \;=\; \frac{f_{BS}}{4\pi}\vec{\nabla}_x \int d^3x'\, \left(\vec{\nabla}_{x'}\vec{j}(t,\vec{x}')\right)\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) + f_{BS}\vec{j}(t,\vec{x})$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_x \int d^3x'\, \vec{\nabla}_{x'}\left(\vec{j}(t,\vec{x}')\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) &= \vec{\nabla}_x \int\limits_A dS\, \left(\vec{j}(t,\vec{x}')\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\cdot\hat{n} \\ &= \int\limits_A dS\, \vec{j}(t,\vec{x}')\cdot\hat{n}\; \vec{\nabla}_x\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 0,\end{aligned}$$

da $\vec{j}(t,\vec{x}')$ ganz im Endlichen liegen soll, und daher (für ein groß genug gewähltes Volumen) auf dessen Oberfläche verschwindet.
Nun verwendet man die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) \;=\; 0.$$

und erhält

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(t,\vec{x}) \;=\; -\frac{f_{BS}}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}_x \int d^3x'\, \frac{\rho(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + f_{BS}\vec{j}(t,\vec{x})$$

Nun hat man mit $\rho(t,\vec{x}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x})/f_G$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_x \int d^3x' \, \frac{\rho(t,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &= -\int d^3x' \, \rho(t,\vec{x}')\vec{\nabla}_{x'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= -\frac{1}{f_G}\int d^3x' \left(\vec{\nabla}_{x'}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}')\right)\vec{\nabla}_{x'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= \frac{1}{f_G}\int d^3x' \, \vec{D}(t,\vec{x}')\Delta_{x'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= -\frac{4\pi}{f_G}\vec{D}(t,\vec{x}),
\end{aligned}$$

und somit

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(t,\vec{x}) = \frac{f_{BS}}{f_G}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(t,\vec{x}) + f_{BS}\vec{j}(t,\vec{x})$$

Bemerkung: Aus der integralen Form des Gesetzes von Biot und Savart folgt durch die oben gezeigte etwas längere Ableitung die korrekte lokale Form dieses Gesetzes inklusive des Verschiebestromes $\partial\vec{D}/\partial t$.

3.2.5 Zusammenfassung der Maxwellschen Gleichungen

Fassen wir die vier Maxwellschen Gleichungen zusammen:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0, \\
\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) + f_F\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0, \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) &= f_G\rho(t,\vec{x}), \\
\vec{\nabla}\times\vec{H}(t,\vec{x}) - \frac{f_{BS}}{f_G}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(t,\vec{x}) &= f_{BS}\vec{j}(t,\vec{x}).
\end{aligned}$$

Die Lorentz-Kraft:

$$\vec{F}(t,\vec{x}) = q\left(\vec{E}(t,\vec{x}) + f_F\vec{v}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right).$$

Für die Konstanten f_F, f_G und f_{BS} haben wir im SI-System, bzw. im Gaußschen System:

	f_F	f_G	f_{BS}
SI	1	1	1
Gauß	$\frac{1}{c}$	4π	$\frac{4\pi}{c}$

Bemerkung: Die Kontinuitätsgleichung kann aus der lokalen Form der Maxwellschen Gleichungen hergeleitet werden. Man betrachte hierzu die Zeitableitung der dritten Gleichung und die

Divergenz der vierten Gleichung:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) &= 4\pi\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x}), \\
\underbrace{\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}(t,\vec{x})\right)}_{=0}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\vec{D}(t,\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\vec{j}(t,\vec{x}).
\end{aligned}
$$

Daher

$$
\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x})+\vec{\nabla}\vec{j}(t,\vec{x}) = 0.
$$

Historische Bemerkung: Das Ampèresche Gesetz für **stationäre Ströme**:

$$
\vec{\nabla}\times\vec{H}(t,\vec{x}) = f_{BS}\vec{j}(t,\vec{x}), \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = 0.
$$

Die Verallgemeinerung dieser Gleichung auf nicht-stationäre Ströme führt zu einer nicht-konsistenten Theorie. Es fehlt der Verschiebestrom, der die Ladungserhaltung bewirkt.

Ab jetzt werden wir in dieser Vorlesung nur noch das Gaußsche Maßsystem verwenden. Die Maxwellschen Gleichungen lauten demzufolge:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0, \\
\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x})+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0, \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) &= 4\pi\rho(t,\vec{x}), \\
\vec{\nabla}\times\vec{H}(t,\vec{x})-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(t,\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{x}).
\end{aligned}
$$

Im Vakuum haben wir

$$
\begin{aligned}
\vec{D}(t,\vec{x}) &= \vec{E}(t,\vec{x}), \\
\vec{H}(t,\vec{x}) &= \vec{B}(t,\vec{x}).
\end{aligned}
$$

Die Lorentz-Kraft:

$$
\vec{F}(t,\vec{x}) = q\left(\vec{E}(t,\vec{x})+\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}(t,\vec{x})\right).
$$

3.3 Elektromagnetische Potentiale und Eichinvarianz

3.3.1 Skalare Potentiale und Vektorpotentiale

Aus der Mathematik ist bekannt, daß ein Vektorfeld, dessen Rotation verschwindet, sich als Gradient einer skalaren Funktion darstellen läßt:

$$
\vec{\nabla}\times\vec{V} = 0 \implies \vec{V} = \vec{\nabla}\Phi.
$$

Ebenso ist bekannt, daß ein divergenzfreies Vektorfeld sich als die Rotation eines weiteren Vektorfeldes schreiben läßt:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \implies \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Bezogen auf die Maxwellschen Gleichungen führen wir nun zwei Hilfsfelder Φ und $\vec{A}$, so daß die beiden homogenen Maxwellschen Gleichungen identisch erfüllt sind. Aus

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(t,\vec{x}) = 0$$

folgt

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t,\vec{x}).$$

Das Hilfsfeld $\vec{A}(t,\vec{x})$ nennt man das **Vektorpotential**. Setzt man den Ausdruck für $\vec{B}$ in die zweite Maxwellsche Gleichung ein, so erhält man

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}(t,\vec{x}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}) \right) = 0$$

Somit läßt sich der Ausdruck in der Klammer als Gradient eines skalaren Feldes darstellen:

$$\vec{E}(t,\vec{x}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}).$$

Das Minuszeichen ist Konvention.

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}).$$

$\Phi(t,\vec{x})$ nennt man das **skalare Potential**. Betrachten wir nun die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen im Vakuum, d.h. $\vec{D} = \vec{E}$ und $\vec{H} = \vec{B}$. Setzt man die obigen Ausdrücke in die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}) \right) &= 4\pi\rho(t,\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}) \right) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{x}). \end{aligned}$$

Umschreiben liefert:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(t,\vec{x}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t,\vec{x}) &= -4\pi\rho(t,\vec{x}), \\ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(t,\vec{x}) - \Delta\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x}) \right) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{x}). \end{aligned}$$

3.3.2 Eichinvarianz

Die Zerlegung

$$\begin{aligned} \vec{B}(t,\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(t,\vec{x}), \\ \vec{E}(t,\vec{x}) &= -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}). \end{aligned}$$

ist nicht eindeutig. Setzt man

$$\vec{A}'(t,\vec{x}) = \vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{x})$$

und gleichzeitig

$$\Phi'(t,\vec{x}) = \Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,\vec{x})$$

so ändern sich die physikalischen Felder nicht:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}'(t,\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{x})\right) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t,\vec{x}) = \vec{B}(t,\vec{x}),$$

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla}\Phi'(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}'(t,\vec{x}) &= -\vec{\nabla}\left(\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,\vec{x})\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{x})\right) \\ &= -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}) = \vec{E}(t,\vec{x}). \end{aligned}$$

Eine Transformation des Typs

$$\begin{aligned} \Phi'(t,\vec{x}) &= \Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,\vec{x}), \\ \vec{A}'(t,\vec{x}) &= \vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{x}), \end{aligned}$$

heißt Eichtransformation der Potentiale. Eine Eichtransformation läßt das elektrische Feld und das Induktionsfeld unverändert.

Man kann die Eichtransformationen benutzen, um zusätzliche Bedingungen an die Potentiale Φ und $\vec{A}$ zu stellen. Eine übliche Forderung ist zum Beispiel

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x}) = 0.$$

Erfüllt das skalare Potential und das Vektorpotential diese Gleichung, so sagt man, daß die Potentiale in der Lorenz-Eichung[1] sind. Man kann beliebige Potentiale Φ und $\vec{A}$ in die Lorenz-Eichung bringen, indem man eine Eichfunktion χ als Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\chi(t,\vec{x}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x})$$

[1] Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891); Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

wählt.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi'(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}'(t,\vec{x}) &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi(t,\vec{x})\right) + \vec{\nabla}\left(\vec{A}(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\chi(t,\vec{x})\right) \\
&= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x})\right) - \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\chi(t,\vec{x}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die Lorenz-Bedingung legt die Potentiale noch nicht eindeutig fest, sondern definiert nur eine Klasse von Potentialen. So hat man noch immer die Freiheit, weitere Eichtransformationen mit einer Eichtransformation, die

$$
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\chi(t,\vec{x}) = 0
$$

erfüllt, auszuführen. Beweis analog zu oben.

In der Lorenz-Eichung lauten die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\Phi(t,\vec{x}) &= 4\pi\rho(t,\vec{x}), \\
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{x}),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\vec{A}(t,\vec{x}) = 0
$$

gilt.

Eine andere Klasse von Eichungen wird durch die Bedingung

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(t,\vec{x}) = 0
$$

festgelegt. Diese Eichung nennt man Coulomb-Eichung.

3.3.3 Partielle inhomogene Differentialgleichungen

Wir betrachten als Beispiel für eine inhomogene Differentialgleichung die Poisson-Gleichung

$$
\Delta\Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}).
$$

Es sei $f(\vec{x})$ vorgegeben und wir suchen eine Lösung $\Phi(\vec{x})$. Eine Lösung erhält man mit Hilfe der Greenschen Funktion. Diese Lösungsmethode ist allgemein und läßt sich auch auf andere Gleichungen wie die Helmholtz-Gleichung

$$\left(\Delta + \omega^2\right) \Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}),$$

oder auf die vierdimensionale Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung

$$\Box \Phi(x) = f(x)$$

anwenden. Als **Greensche Funktion** bezeichnet man eine Lösung der Differentialgleichung, in der auf der rechten Seite eine Delta-Funktion auftritt. Für die Poisson-Gleichung lautet die zugehörige Differentialgleichung für die Greensche Funktion

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Multipliziert man beide Seiten mit $f(\vec{x}')$ und integriert man über $\vec{x}'$ so erhält man

$$\int d^3x' \Delta_x \left(f(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \right) = f(\vec{x})$$

Δ_x wirkt nur auf die ungestrichenen Größen und kann vor das Integral gezogen werden:

$$\Delta_x \left(\int d^3x' f(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') \right) = f(\vec{x})$$

Somit ist

$$\Phi(x) = \int d^3x' f(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}')$$

eine Lösung der Gleichung

$$\Delta \Phi(\vec{x}) = f(\vec{x}).$$

Fazit: Ist die Greensche Funktion bekannt, kann man auch die Lösungen für einen beliebigen inhomogen Term $f(\vec{x})$ konstruieren.

Bestimmung der Greenschen Funktion: In der Herleitung der lokalen Form des Gesetzes von Biot-Savart wurde verifiziert, daß

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung ist. Nun wollen wir eine allgemeine Methode zur Bestimmung von Greenschen Funktionen betrachten. Wir gehen von der Differentialgleichung für die Greensche Funktion aus

$$\Delta_x G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

und betrachten die Fouriertransformierten:

$$
\begin{aligned}
G(\vec{x}-\vec{x}') &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\tilde{G}(\vec{k}), \\
\delta(\vec{x}-\vec{x}') &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\tilde{\delta}(\vec{k}).
\end{aligned}
$$

$\tilde{\delta}(\vec{k})$ ist gegeben durch

$$
\tilde{\delta}(\vec{k}) = \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\delta(\vec{x}-\vec{x}') = 1.
$$

Eingesetzt erhält man

$$
\Delta_x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\tilde{G}(\vec{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}.
$$

Δ_x wirkt nur auf die Exponentialfunktion:

$$
\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}(-|\vec{k}|^2) e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\tilde{G}(\vec{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}.
$$

Aus der Gleichheit der Integranden folgt

$$
\tilde{G}(\vec{k}) = -\frac{1}{|\vec{k}|^2},
$$

und somit

$$
\begin{aligned}
G(\vec{x}-\vec{x}') &= -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\vec{k}|^2} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}, \qquad \vec{x}-\vec{x}' = (0,0,r) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta e^{-ikr\cos\theta}, \qquad u = -\cos\theta \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk \int_{-1}^1 du e^{ikru} = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk \frac{1}{ikr}\left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right) \\
&= -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk \frac{\sin(kr)}{kr} = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{\pi}{2r} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die Lösung der Poisson-Gleichung

$$
\Phi(x) = \int d^3x' f(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}')
$$

ist nicht eindeutig, wir können zu dieser Lösung immer eine Lösung der homogenen Gleichung

$$
\Delta\Phi(\vec{x}) = 0
$$

addieren.

3.3.4 Probleme mit Randwertbedingungen

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen zusätzlich Randbedingungen gefordert werden.

Dirichlet-Randbedingungen: Das Potential auf einer geschlossenen Fläche ist vorgegeben. (Beispiel: Elektrische Leiter mit gegebenen Potentialen.)

Neumann-Randbedingungen: Die Normalenableitung $\partial\Phi/\partial\hat{n}$ auf einer geschlossenen Fläche ist vorgegeben. (Beispiel: Vorgegebene Flächenladungen.)

Eindeutigkeit: Seien Φ_1 und Φ_2 zwei Lösungen der Poisson-Gleichung mit vorgegebenen Randbedingungen, d.h.

$$\Phi_1|_F = \Phi_2|_F\,, \quad \text{Dirichlet}$$

oder

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial\hat{n}}\right|_F = \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial\hat{n}}\right|_F\,, \quad \text{Neumann}$$

Betrachte nun $U = \Phi_2(\vec{x}) - \Phi_1(\vec{x})$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta U(\vec{x}) &= 0, \\
U|_F &= 0, \quad \text{Dirichlet} \\
\left.\frac{\partial U}{\partial\hat{n}}\right|_F &= 0, \quad \text{Neumann}
\end{aligned}$$

Aus dem ersten Greenschen Satz (mit $A = \partial V$)

$$\int_V d^3x \left(\Phi\Delta\Psi + \vec{\nabla}\Phi\cdot\vec{\nabla}\Psi\right) = \int_A dS\,\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{n}}.$$

folgt mit $\Phi = \Psi = U$:

$$\int_V d^3x \underbrace{\left(\vec{\nabla}U\cdot\vec{\nabla}U\right)}_{\geq 0} = \int_A dS\,U\frac{\partial U}{\partial\hat{n}}.$$

Das Oberflächenintegral auf der rechten Seite gleich Null. Daher gilt

$$\int_V d^3x \left(\vec{\nabla}U\cdot\vec{\nabla}U\right) = 0,$$

und da der Integrand nicht negativ sein kann, folgt

$$\vec{\nabla}U = 0.$$

Daher ist U in V konstant. Für das Dirichletsche Randwertproblem gilt $U = 0$ auf F, und da U konstant ist, auch in V. Somit ist die Lösung eindeutig. Für das Neumannsche Randwertproblem können sich zwei Lösungen um eine additive Konstante unterscheiden.

3.4 Die Maxwellschen Gleichungen in kovarianter Form

3.4.1 Die Lorentzkraft und der Feldstärketensor

Zur Erinnerung: Vierergeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right) = \gamma\left(1, \frac{1}{c}\vec{v}\right).$$

$$ds = \frac{c}{\gamma}dt,$$

Viererbeschleunigung:

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds}$$

Newtons Gesetz $F = ma$ in relativistischer Verallgemeinerung:

$$mc^2\frac{d}{ds}u^\mu = K^\mu.$$

Kontraktion mit u_μ liefert:

$$mc^2 u_\mu \frac{d}{ds}u^\mu = \frac{1}{2}mc^2\frac{d}{ds}\underbrace{u^2}_{1} = 0,$$

und daher

$$K^\mu u_\mu = 0.$$

Für die räumlichen Komponenten gilt:

$$\vec{K} = \gamma\vec{F}$$

Angewandt auf die Lorentzkraft:

$$mc^2\frac{d}{ds}\vec{u} = mc^2\frac{d}{ds}\left(\gamma\frac{\vec{v}}{c}\right) = q\gamma\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right).$$

Für die zeitliche Komponente gilt

$$u_\mu K^\mu = \gamma K^0 - \frac{\gamma}{c}\vec{v}\vec{K} = 0,$$

$$K^0 = \frac{1}{c}\vec{v}\vec{K},$$

und daher

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^0 = mc^2 \frac{d}{ds}\gamma = \frac{1}{c} q\gamma \vec{E}\vec{v}.$$

Somit:

$$\begin{aligned} mc^2 \frac{d}{ds}(\gamma) &= \gamma q \vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c}, \\ mc^2 \frac{d}{ds}\left(\gamma \frac{\vec{v}}{c}\right) &= \gamma q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right). \end{aligned}$$

Die linke Seite lautet kovariant geschrieben

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu$$

Setzt man nun

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

so ist

$$\begin{aligned} qF^{\mu\nu} u_\nu &= q \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ -\gamma \frac{v^x}{c} \\ -\gamma \frac{v^y}{c} \\ -\gamma \frac{v^z}{c} \end{pmatrix} \\ &= q \begin{pmatrix} \gamma \vec{E} \frac{\vec{v}}{c} \\ \gamma E^x + \frac{\gamma}{c}(v^y B^z - v^z B^y) \\ \gamma E^y + \frac{\gamma}{c}(v^z B^x - v^x B^z) \\ \gamma E^z + \frac{\gamma}{c}(v^x B^y - v^y B^x) \end{pmatrix} = q\gamma \begin{pmatrix} \vec{E} \frac{\vec{v}}{c} \\ \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit ist die Lorentzkraft als Viererkraft gegeben durch

$$K^\mu = qF^{\mu\nu} u_\nu$$

und wir können daher schreiben

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu = qF^{\mu\nu} u_\nu.$$

Die linke Seite transformiert sich wie ein kontravarianter Vektor unter der Lorentzgruppe, u_ν transformiert wie ein kovarianter Vektor, daher muß sich $F^{\mu\nu}$ wie ein Tensor zweiter Stufe transformieren:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma F^{\rho\sigma}$$

$F^{\mu\nu}$ nennt man den **Feldstärketensor**. Die elektrischen und magnetischen Felder erhält man aus $F^{\mu\nu}$ durch

$$
\begin{aligned}
E^i &= F^{i\,0} = -F^{0\,i}, \\
B^i &= -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} F^{jk}.
\end{aligned}
$$

Bemerkung: $F^{\mu\nu}$ ist anti-symmetrisch:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

3.4.2 Die Kontinuitätsgleichung und die Viererstromdichte

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x}) + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = 0.$$

Sie gilt in jedem Koordinatensystem. Sie läßt sich mit

$$j^\mu = \left(c\rho, \vec{j}\right)$$

auch als

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Nun ist $\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$ ein kovarianter Vierervektor und $\partial_\mu j^\mu$ ein Skalar. Daher transformiert sich j^μ wie ein kontravarianter Vierervektor.

3.4.3 Die Maxwellschen Gleichungen

Die homogenen Maxwellschen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0, \\
\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

Setzen wir $\lambda = 1$, $\mu = 2$ und $\nu = 3$ so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} &= 0, \\
-\frac{\partial}{\partial x}(-B^x) - \frac{\partial}{\partial y}(-B^y) - \frac{\partial}{\partial z}(-B^z) &= 0, \\
\vec{\nabla}\vec{B} &= 0.
\end{aligned}
$$

Dies ist die erste Maxwellsche Gleichung. Jede Permutation von $(\lambda,\mu,\nu) = (1,2,3)$ liefert diese Gleichung. Sei nun $\lambda = 0$, $\mu = 1$ und $\nu = 2$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} &= 0, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-B^z) - \frac{\partial}{\partial x}E^y - \frac{\partial}{\partial y}(-E^x) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}E^y - \frac{\partial}{\partial y}E^x + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B^z &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist die z-Komponente der zweiten Maxwellschen Gleichung. Die x- sowie die y-Komponente erhalten wir für $(\lambda,\mu,\nu) = (0,2,3)$ bzw. $(\lambda,\mu,\nu) = (0,3,1)$. Somit lassen sich die ersten beiden Maxwellschen Gleichungen zu

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

zusammenfassen. Mit Hilfe des anti-symmetrischen Tensors $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ und wegen der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ kann dies auch als

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0$$

geschrieben werden.

Die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(t,\vec{x}) &= 4\pi\rho(t,\vec{x}), \\ \vec{\nabla} \times \vec{B}(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(t,\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{x}). \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

Für $\nu = 0$ haben wir

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} &= 4\pi\rho, \\ \frac{\partial}{\partial x}E^x + \frac{\partial}{\partial y}E^y + \frac{\partial}{\partial z}E^z &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho. \end{aligned}$$

Dies ist die dritte Maxwellsche Gleichung.

Für $\nu = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} &= \frac{4\pi}{c} j^x, \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(-E^x) + \frac{\partial}{\partial y}B^z + \frac{\partial}{\partial z}(-B^y) &= \frac{4\pi}{c} j^x, \\ \frac{\partial}{\partial y}B^z - \frac{\partial}{\partial z}B^y - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E^x &= \frac{4\pi}{c} j^x. \end{aligned}$$

Dies ist die x-Komponente der vierten Maxwellschen Gleichung Die y- bzw. z-Komponente erhalten wir für $\nu = 2$ bzw. $\nu = 3$. Somit ist gezeigt, daß sich die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen zu

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu$$

zusammenfassen lassen.

3.4.4 Viererpotential

Es wurde schon gezeigt, daß sich die homogenen Maxwellschen Gleichungen durch die Einführung eines skalaren Potentials Φ und eines Vektorpotentials $\vec{A}$ identisch erfüllen lassen. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(t,\vec{x}) &= -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial x}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^x \\ -\frac{\partial}{\partial y}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^y \\ -\frac{\partial}{\partial z}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^z \end{pmatrix}, \\
\vec{B}(t,\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}A^z - \frac{\partial}{\partial z}A^y \\ \frac{\partial}{\partial z}A^x - \frac{\partial}{\partial x}A^z \\ \frac{\partial}{\partial x}A^y - \frac{\partial}{\partial y}A^x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir betrachten nun das **Viererpotential**

$$A^\mu = \left(\Phi, \vec{A}\right)$$

und berechnen

$$\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Zur Erinnerung:

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)$$

$$\begin{aligned}
\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^x + \frac{\partial}{\partial x}\Phi & \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^y + \frac{\partial}{\partial y}\Phi & \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^z + \frac{\partial}{\partial z}\Phi \\ -\frac{\partial}{\partial x}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^x & 0 & -\frac{\partial}{\partial x}A^y + \frac{\partial}{\partial y}A^x & -\frac{\partial}{\partial x}A^z + \frac{\partial}{\partial z}A^x \\ -\frac{\partial}{\partial y}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^y & -\frac{\partial}{\partial y}A^x + \frac{\partial}{\partial x}A^y & 0 & -\frac{\partial}{\partial y}A^z + \frac{\partial}{\partial z}A^y \\ -\frac{\partial}{\partial z}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A^z & -\frac{\partial}{\partial x}A^y + \frac{\partial}{\partial y}A^x & -\frac{\partial}{\partial z}A^y + \frac{\partial}{\partial y}A^z & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix} = F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, daß sich der Feldstärketensor durch

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

darstellen läßt.

Bemerkung: Die homogenen Maxwellschen Gleichungen sind identisch erfüllt:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\nu \left(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho\right) = 2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \underbrace{\partial^\nu \partial^\rho}_{\text{symmetrisch}} A^\sigma = 0.$$

Einsetzen in die inhomogenen Gleichungen liefert

$$\Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

Die Bedingung für die Lorenz-Eichung lautete

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi + \vec{\nabla}\vec{A} = 0.$$

Dies läßt sich kovariant als

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

schreiben, und gilt daher, wenn sie in einem Bezugssystem gültig ist, auch in allen anderen. Die Lorenz-Eichung ist eine kovariante Eichung.

Bemerkung: Die Wahl einer Eichung muß nicht notwendiger Weise kovariant sein. Ein Gegenbeispiel ist die Coulomb-Eichung, die in einem Koordinatensystem K durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

definiert ist. In einem zu K bewegten Bezugssystem K' gilt im allgemeinen

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{A}' \neq 0$$

In der Lorenz-Eichung ($\partial_\mu A^\mu$) lauten die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

3.4.5 Zusammenfassung der kovarianten Formulierung

Definition des Feldstärketensors:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}$$

Maxwellsche Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} &= 0, \\
\partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu,
\end{aligned}
$$

wobei $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$.

Lorentz-Kraft und Bewegungsgleichung:

$$
mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu = K^\mu, \qquad K^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu.
$$

Vierer-Potential:

$$
\begin{aligned}
A^\mu &= \left(\Phi, \vec{A}\right) \\
F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.
\end{aligned}
$$

Die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen mit Hilfe des Vierer-Potentials:

$$
\Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.
$$

Lorenz-Eichung:

$$
\partial_\mu A^\mu = 0
$$

Die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen in der Lorenz-Eichung:

$$
\Box A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.
$$

4 Das Wirkungsprinzip

4.1 Die relativistische Mechanik in der Lagrange-Formulierung

Wir haben gesehen, daß wir die Newtonsche Mechanik elegant durch eine Lagrange-Funktion beschreiben können. Wir wissen bereits, daß die Newtonsche Mechanik nur gilt, falls alle Geschwindigkeiten klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind. Sind dagegen die Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit, so müssen wir die relativistische Mechanik verwenden. Es stellt sich daher die Frage, ob auch die relativistische Mechanik mit Hilfe einer Lagrange-Funktion und eines Wirkungsprinzips formuliert werden kann. Für ein relativistisches Teilchen gilt die Bewegungsgleichung

$$
\frac{d}{d\tau} p^\mu = K^\mu.
$$

Mit Hilfe von $ds = cd\tau$ und $p^\mu = mcu^\mu$ läßt sich die Bewegungsgleichung auch wie folgt schreiben:

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu \;=\; K^\mu.$$

Für ein kräftefreies relativistisches Teilchen reduziert sich diese Bewegungsgleichung auf

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu \;=\; 0,$$

für ein relativistisches Teilchen in einem elektromagnetischen Feld ist die Kraft durch die Lorentzkraft gegeben und wir hatten die Bewegungsgleichung

$$mc^2 \frac{d}{ds} u^\mu \;=\; qF^{\mu\nu} u_\nu.$$

Wir wollen nun diese beiden Fälle aus einem Wirkungsprinzip herleiten. Die Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen lautet

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = 0, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{d}{ds} u^\mu = 0,$$

Wir suchen nun eine Wirkung, dessen Variation diese Bewegungsgleichung liefert. In der nichtrelativistischen Mechanik war die entsprechende Wirkung gegeben durch

$$S \;=\; \int\limits_{t_a}^{t_b} dt\, \frac{1}{2} m\vec{v}^2.$$

Der Ausdruck unter dem Integral

$$\frac{1}{2} m\vec{v}^2\, dt$$

ist hierbei invariant bis auf Eichtransformationen unter den kontinuierlichen Symmetrien der Galilei-Gruppe. (Dieser Ausdruck ist auch invariant unter der Raumspiegelung, er ändert aber sein Vorzeichen unter der Zeitumkehr. Im Falle der Zeitumkehr muß man im Integral natürlich auch die Integralgrenzen transformieren: $t_a \to -t_a$ und $t_b \to -t_b$. Vertauscht man nun $(-t_a)$ und $(-t_b)$, so bekommt man ein weiteres Minuszeichen.)

In der relativistischen Mechanik suchen wir nun einen Ausdruck, der invariant bis auf Eichtransformationen unter den kontinuierlichen Symmetrien der Poincaré-Gruppe ist. Dieser gesuchte Ausdruck muß natürlich auch wieder ein Differential erster Ordnung sein. Hier bietet sich die infinitessimale Größe ds an. Wir wissen bereits, daß ds unter den Poincaré-Transformationen invariant ist. Wir machen den Ansatz

$$S \;=\; A \int\limits_a^b ds,$$

mit einer zu bestimmenden Konstante A. Das Integral ist längs einer Weltlinie zwischen den Ereignissen a und b zu nehmen. Legen wir uns auf ein bestimmtes Koordinatensystem fest, so können wir auch schreiben

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L\,dt,$$

wobei L als Lagrange-Funktion bezeichnet wird.

Betrachten wir also zunächst das Funktional

$$S[x^\mu(\tau)] = A\int_a^b ds$$

und eine Variation der Bahn

$$x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$$

Wir wollen wieder fordern, daß die physikalische Bahn diejenige ist, unter welcher die Wirkung stationär wird. Es muß also gelten:

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu(\tau)} S[x^\mu(\tau)] = 0.$$

Wir benötigen nun die Variation des infinitessimalen Viererwegelements ds. Es ist

$$\frac{\delta}{\delta x^\mu} ds = \frac{\delta}{\delta x^\mu}\sqrt{dx_\nu dx^\nu} = \frac{1}{2\sqrt{dx_\rho dx^\rho}}\, 2dx_\nu \frac{\delta}{\delta x^\mu} dx^\nu = \frac{dx_\nu}{ds}\frac{\delta}{\delta x^\mu} dx^\nu = u_\nu \frac{\delta}{\delta x^\mu} dx^\nu$$

und somit

$$\delta ds = u_\nu \delta dx^\nu.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\delta S &= A\int_a^b \delta ds = A\int_a^b u_\nu \delta dx^\nu = A\int_a^b u_\nu \frac{d\delta x^\nu}{ds} ds \\ &= A\, u_\nu \delta x^\nu\big|_a^b - A\int_a^b \left(\frac{d}{ds}u_\nu\right)\delta x^\nu ds = -A\int_a^b ds\, \left(\frac{d}{ds}u_\nu\right)\delta x^\nu.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, daß die Variation am Anfangspunkt a und am Endpunkt b verschwinden soll. Aus der obigen Gleichung folgt nun

$$\frac{d}{ds}u_\nu = 0,$$

was genau die relativistische Formulierung der Bewegungsgleichung eines freien Teilchen ist. Wir haben also gesehen, daß die Variation der Wirkung

$$S = A\int_a^b ds$$

die richtige Bewegungsgleichung liefert. Wir wissen allerdings noch nicht, welchen Wert die Konstante A haben muß. Um diese Konstante A zu bestimmen, wählen wir ein Koordinatensystem, so daß wir die Wirkung als

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L\, dt$$

schreiben können und fordern, daß sich die Lagrange-Funktion im nicht-relativistischen Grenzfall auf

$$\lim_{v\to 0} L = \mathrm{const} + \frac{1}{2}mv^2 + O\left(v^4\right)$$

reduziert.

Mit

$$ds = cdt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

erhalten wir

$$L = Ac\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Wir entwickeln L:

$$L = Ac\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = Ac - \frac{Av^2}{2c} + O\left(v^4\right)$$

Daher folgt $A = -mc$ und

$$S = -mc^2\int_{t_a}^{t_b} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}, \qquad L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

bzw.

$$S = -mc\int_a^b ds.$$

Nachdem wir nun ein kräftefreies Teilchen betrachtet haben, wollen wir uns dem Problem zuwenden, die relativistische Wirkung für ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld zu bestimmen. Der Zusatzterm, der die elektromagnetische Kraft auf das Teilchen beschreibt, muß natürlich wieder eine skalare Größe unter Lorentztransformationen sein. Andererseits erwarten wir natürlich auch, daß er das elektromagnetische Viererpotential A^μ und die Vierergeschwindigkeit u^ν des Teilchens enthält. Ein Lorentz-invariante Größe, die sich aus diesen beiden Vierervektoren konstruieren läßt, ist zum Beispiel

$$u_\mu A^\mu .$$

Wir betrachten daher zunächst die Wirkung

$$S = \int_a^b ds \left(-mc - \frac{q}{c} u_\mu A^\mu \right)$$

und zeigen, daß diese Wirkung die bekannte Bewegungsgleichung liefert.
Die Variation des ersten Terms liefert wieder

$$\delta \left(-mc \int_a^b ds \right) = mc \int_a^b ds \left(\frac{d}{ds} u_\mu \right) \delta x^\mu .$$

Betrachten wir nun den zweiten Term. Wir können diesen Term auch als

$$-\frac{q}{c} \int_a^b ds\, u_\mu A^\mu = -\frac{q}{c} \int_a^b ds \frac{dx_\mu}{ds} A^\mu = -\frac{q}{c} \int_a^b dx_\mu\, A^\mu$$

schreiben. Die Variation liefert

$$\begin{aligned}
\delta \left(\int_a^b dx_\mu A^\mu \right) &= \int_a^b \left[A^\mu \delta dx_\mu + (\delta A^\mu)\, dx_\mu \right] = \int_a^b \left[A^\mu d\left(\delta x_\mu\right) + (\partial_\nu A^\mu)\, \delta x^\nu dx_\mu \right] \\
&= \int_a^b ds \left[A^\mu \frac{d}{ds} \left(\delta x_\mu\right) + (\partial_\nu A^\mu)\, \delta x^\nu \frac{dx_\mu}{ds} \right] \\
&= \int_a^b ds \left[-\left(\frac{d}{ds} A^\mu \right) \left(\delta x_\mu\right) + (\partial_\nu A^\mu)\, \delta x^\nu u_\mu \right] \\
&= \int_a^b ds \left[-(\partial_\nu A^\mu) \frac{\partial x^\nu}{ds} \left(\delta x_\mu\right) + (\partial_\nu A^\mu)\, \delta x^\nu u_\mu \right] \\
&= \int_a^b ds\, \left[-\left(\partial_\nu A_\mu\right) u^\nu + \left(\partial_\mu A_\nu\right) u^\nu \right] \delta x^\mu = \int_a^b ds\, \left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right] u^\nu \delta x^\mu \\
&= \int_a^b ds\, F_{\mu\nu} u^\nu \delta x^\mu .
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir insgesamt für die Variation der Wirkung

$$\delta S = \int_a^b ds \left[mc\frac{d}{ds}u_\mu - \frac{q}{c}F_{\mu\nu}u^\nu \right] \delta x^\mu.$$

Hieraus folgt die Bewegungsgleichung

$$mc\frac{d}{ds}u_\mu = \frac{q}{c}F_{\mu\nu}u^\nu,$$

bzw.

$$\frac{d}{d\tau}p_\mu = qF_{\mu\nu}u^\nu,$$

womit gezeigt wäre, daß wir wieder die bekannte Bewegungsgleichung eines relativistischen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld erhalten.

Somit lautet die Wirkung und die Lagrangefunktion für ein relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld

$$S = \int_a^b ds \left(-mc - \frac{q}{c}u_\mu A^\mu \right) = \int_{t_a}^{t_b} dt L,$$

$$L = -mc^2\frac{1}{\gamma} - \frac{q}{\gamma}u^\mu A_\mu = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - q\Phi + \frac{q}{c}\vec{v}\vec{A}.$$

Der kanonische Impuls ist wie üblich als die Ableitung der Lagrangefunktion nach der Geschwindigkeit definiert:

$$\vec{p}_{\text{kanonisch}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{q}{c}\vec{A} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}.$$

Hierbei ist zwischen dem mechanischen Impuls $\vec{p}_{\text{mechanisch}} = \vec{p}$ und dem kanonischen Impuls $\vec{p}_{\text{kanonisch}} = \vec{p} + \frac{q}{c}\vec{A}$ zu unterscheiden. Die Hamiltonfunktion ergibt sich zu

$$H = \vec{v}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\Phi = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\vec{p}_{\text{kanonisch}} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2} + q\Phi,$$

wobei im letzten Schritt ausgenutzt wurde, daß aus

$$\vec{p}_{\text{mechanisch}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

die Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{mc}\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^{\,2}_{\text{mechanisch}}} = \frac{1}{mc}\sqrt{m^2c^2+\left(\vec{p}_{\text{kanonisch}}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}$$

folgt. Daher ist

$$H - q\Phi = \sqrt{m^2c^4+c^2\left(\vec{p}_{\text{kanonisch}}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2}.$$

Wir stellen uns nun ein System einmal mit und einmal ohne elektromagnetische Felder vor. Wir gelangen von der Situation ohne elektromagnetische Felder zu der Situation mit elektromagnetischen Feldern durch die folgenden Ersetzungsregeln:

$$\begin{aligned} H &\rightarrow H - q\Phi, \\ \vec{p}_{\text{kanonisch}} &\rightarrow \vec{p}_{\text{kanonisch}} - \frac{q}{c}\vec{A}. \end{aligned}$$

Diese Regeln werden auch als **minimale Substitution** bezeichnet.

4.2 Felder als dynamische Variablen

Wir betrachten nun ein System bestehend aus Teilchen und Feldern. In der klassischen Mechanik sind die Felder nur (vorgegebene) Hilfsgrößen.
In der relativistischen Mechanik breitet sich die Wirkung mit einer endlichen Geschwindigkeit aus. Daher ändern sich Felder auch nicht instantan, sondern Änderungen breiten sich mit einer endlichen Signalgeschwindigkeit aus. Daher sind auch Felder als dynamische Variablen zu betrachten.

Das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung läßt sich auch auf Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden verallgemeinern. Hierbei wollen wir ausgehend von einem System mit endlich vielen Freiheitsgraden dies zunächst auf abzählbar viele Freiheitsgrade verallgemeinern und dann in einem zweiten Schritt dies auf überabzählbar viele Freiheitsgrade verallgemeinern:

- Endlich viele Koordinaten $q_i(t)$: Dieser Fall ist aus der Lagrangemechanik bekannt. Als ein Beispiel betrachten wir ein Modell für einen (eindimensionalen) elastischen Stab. Wir stellen uns vor, daß dieser Stab durch n Massepunkte der Masse m beschrieben wird. Im Ruhezustand sollen alle Massepunkte den Abstand a haben. Die (generalisierte) Koordinate des i-ten Massepunktes sei q_i, die so gewählt ist, so daß im Ruhezustand $q_i = 0$ gilt. Darüber hinaus nehmen wir an, daß benachbarte Massepunkte durch masselose Federn mit der Federkonstante k verbunden seien. Die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie lauten:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m\dot{q}_i^2, \qquad V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} k\left(q_{i+1}-q_i\right)^2.$$

Die Lagrangefunktion lautet

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m\dot{q}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} k\left(q_{i+1} - q_i\right)^2.$$

Die Variation der Wirkung liefert n Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

- Abzählbar viele Koordinaten $q_i(t)$: Hier ist die Verallgemeinerung relativ einfach und wir können das obige Beispiel modifizieren, indem wir einen unendlich langen elastischen Stab betrachten. Die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie lauten nun:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} m\dot{q}_i^2, \qquad V = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} k\left(q_{i+1} - q_i\right)^2.$$

Der einzige Unterschied zum Fall endlich vieler Freiheitsgrade besteht darin, daß hier über abzählbar viele Freiheitsgrade summiert wird. Die Lagrangefunktion lautet:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(m\dot{q}_i^2 - k\left(q_{i+1}-q_i\right)^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} a\left(\frac{m}{a}\dot{q}_i^2 - ka\left(\frac{q_{i+1}-q_i}{a}\right)^2\right).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

Wir erhalten

$$ka\left(\frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{a^2}\right) - \frac{m}{a}\ddot{q}_i = 0.$$

- Überabzählbar viele Koordinaten $q_x(t)$, wobei nun $x \in \mathbb{R}$. Anstelle von $q_x(t)$ schreibt man $q(t,x)$ und betrachtet $q(t,x)$ als ein Feld im (zweidimensionalen) Raum $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten (t,x). Im obigen Beispiel können wir den Grenzfall $a \to 0$ betrachten. Im Grenzfall $a \to 0$ geht das Verhältnis m/a über in μ (Masse pro Längeneinheit). Die Ausdehnung pro Längeneinheit an der Stelle x zur Zeit t bezeichnen wir mit $\xi(t,x)$. Die Größe ka geht über in das Youngsche Modul Y, welches wir als von x und t unabhängig betrachten, da der Stab an jeder Stelle und zu jeder Zeit die gleichen Elastizitätseigenschaften haben soll. Das Youngsche Modul beschreibt die Beziehung zwischen Kraft und Ausdehnung pro Längeneinheit:

$$F(t,x) = Y\xi(t,x).$$

Diese Gleichung ist die Verallgemeinerung des Hookschen Gesetzes auf kontinuierliche Systeme. Für ξ gilt:

$$\xi(t,x) = \lim_{a\to 0} \frac{q_{i+1}(t) - q_i(t)}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{q(t,x+a) - q(t,x)}{a} = \frac{\partial}{\partial x} q(t,x).$$

Die Summation in der Lagrangefunktion geht über in ein Integral und wir erhalten

$$L = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left[\mu \left(\frac{\partial q(t,x)}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial q(t,x)}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Wir bezeichnen den Ausdruck

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - Y \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right]$$

als **Lagrangedichte**. Die Wirkung ist gegeben durch

$$S = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathcal{L}.$$

Schreiben wir zur Abkürzung $\partial_t q = \partial q/\partial t$ und $\partial_x q = \partial q/\partial x$, so haben wir

$$\mathcal{L}\left(\partial_t q, \partial_x q\right) = \frac{1}{2} \mu \left(\partial_t q\right)^2 - \frac{1}{2} Y \left(\partial_x q\right)^2,$$

d.h. in diesem speziellen Beispiel hängt $\mathcal{L}$ nur von den Ableitungen $\partial_t q$ und $\partial_x q$ ab, aber nicht von q selbst. Wir betrachten nun die Variation der Wirkung unter der Variation des Feldes $q(t,x) \to q(t,x) + \delta q(t,x)$. Hierbei wollen wir zum einen annehmen, daß die Variation zu den Zeitpunkten t_a und t_b verschwindet:

$$\delta q\left(t_a, x\right) = \delta q\left(t_b, x\right) = 0.$$

Zum anderen nehmen wir an, daß für alle Zeiten die Variation für $x = \pm\infty$ verschwindet:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \delta q\left(t,x\right) = 0.$$

Wir finden dann

$$\delta S = \int\limits_{t_a}^{t_b} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t q\right)} \delta\partial_t q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_x q\right)} \delta\partial_x q \right].$$

Wir vertauchen nun Variation und Ableitung: $\delta\partial_t q = \partial_t \delta q$ sowie $\delta\partial_x q = \partial_x \delta q$. Im nächsten Schritt verwenden wir partielle Integration (im ersten Term in bezug auf t, im zweiten Term in Bezug auf x) und erhalten

$$\delta S = -\int\limits_{t_a}^{t_b} dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \left[\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_t q\right)} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_x q\right)} \right] \delta q.$$

Hierbei haben wir im ersten Term ausgenutzt, daß die Variation für $t = t_a$ bzw. $t = t_b$ verschwindet. Im zweiten Term haben wir verwendet, daß die Variation für $x \to \pm\infty$ verschwindet. In beiden Fällen treten also keine Randterme auf. Fordern wir nun $\delta S = 0$, so folgt, da dies für beliebige Variationen gelten soll

$$-\partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t q)} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x q)} = 0.$$

Für unser konkretes Beispiel ergibt sich

$$Y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0.$$

Da

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \lim_{a \to 0} \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{a^2}$$

erkennen wir im Ergebnis die kontinuierliche Verallgemeinerung der Euler-Lagrange-Gleichungen des Falles abzählbar vieler Freiheitsgrade wieder.

Im letzten Beispiel haben wir ein Feld $q(t,x)$ in einem zweidimensionalen Raum (eine Zeitkoordinate und eine Raumkoordinate) diskutiert. Wir betrachten nun die Verallgemeinerung auf einen vier-dimensionalen Raum (mit einer Zeitkoordinate und drei Raumkoordinaten). Die Lagrangedichte soll von einem Feld $\psi(x)$ (wobei x nun einen Raumzeitpunkt bezeichnet), dessen Ableitungen $\partial_\mu \psi(x)$, sowie möglicherweise von äußeren Quellen $j(x)$ und/oder ebenfalls möglicherweise explizit von den Raumzeitkoordinaten x abhängen. Wir schreiben

$$\mathcal{L}\left(\psi(x), \, \partial_\mu \psi(x), \, j(x), \, x \right).$$

Die Wirkung ist gegeben als

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \, \mathcal{L} = \frac{1}{c} \int d^4x \, \mathcal{L}$$

Wir verlangen nun, daß für die physikalischen Felder die Wirkung stationär ist. Das Wirkungsprinzip lautet somit

$$\delta S = 0,$$

wobei nach den Felder variiert wird und die Variation der Felder $\delta\psi$ auf den Hyperflächen t_1 und t_2 sowie im räumlich Unendlichen verschwinden soll. Die Euler-Lagrange-Gleichungen lassen sich wie in der klassischen Mechanik herleiten:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\delta\left(\partial_\mu \psi\right)\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\partial_\mu\left(\delta\psi\right)\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\right]\delta\psi
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir partiell integriert und ausgenutzt, daß die Variation bei t_1, t_2 sowie im räumlich Unendlichen verschwindet. Da $\delta S = 0$ für beliebige Variationen (im Rahmen der obigen Voraussetzungen) gelten soll, folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)} = 0.$$

Dies ist die Euler-Lagrange-Gleichung für ein Feld. Treten in einer Lagrangedichte mehrere Felder ψ_i auf, die durch den Index i unterschieden werden, so findet man für jedes i eine Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_i\right)} = 0.$$

Im weiteren werden wir nun versuchen, die Lagrangedichte für die Elektrodynamik zu bestimmen, so daß die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen den inhomogenen Maxwellschen Gleichungen entsprechen.

4.3 Die Lagrangedichte der Elektrodynamik

Für die Wirkung der Elektrodynamik machen wir den Ansatz, daß sie aus einem Term, der "freie" Felder beschreibt und einem Term, der die Wechselwirkung mit der Materie beschreiben soll, besteht.

$$S = S_{\text{Felder}} + S_{\text{WW}}$$

Für die Konstruktion von S_{WW} können wir den Ausdruck für eine Punktladung auf allgemeine Ladungsverteilungen verallgemeinern:

$$S_{\text{WW,Punktladung}} = -\frac{q}{c}\int_a^b dx^\mu\, A_\mu(x).$$

Die Ladungs- und die Stromdichte einer Punktladung mit Bahnkurve $\vec{x}'(t)$ sind:

$$\begin{aligned}
\rho(t,\vec{x}) &= q\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'(t)), \\
\vec{j}(t,\vec{x}) &= q\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'(t)).
\end{aligned}$$

Somit läßt sich die Viererstromdichte für eine Punktladung schreiben als

$$j^\mu(x) = \left(c\rho, \vec{j}\right) = q\,(c,\vec{v})\,\delta^3(\vec{x}-\vec{x}'(t)) = \frac{qc}{\gamma} u^\mu \delta^3(\vec{x}-\vec{x}'(t)) = qc \int ds\, u^\mu\, \delta^4\left(x - x'(s)\right)$$

Hierbei wurde $u^\mu = \gamma/c(c,\vec{v})$ und

$$qc \int ds\, u^\mu\, \delta^4\left(x-x'(s)\right) = qc \int \frac{cdt}{\gamma}\, u^\mu\, \delta\left(x^0 - ct\right) \delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}'(t)\right) = \frac{qc}{\gamma}\, u^\mu\, \delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}'(t)\right).$$

ausgenutzt. Somit haben wir

$$-\frac{1}{c^2} \int d^4x\; j^\mu(x) A_\mu(x) = -\frac{q}{c} \int d^4x \int ds\, u^\mu\, \delta^4\left(x-x'(s)\right) A_\mu(x) = -\frac{q}{c} \int ds\, u^\mu\, A_\mu(x).$$

Besteht ein System aus mehreren Punktladungen, so haben wir

$$S_{\mathrm{WW}} = -\sum_i \frac{q_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} dx_i^\mu\, A_\mu(x) = -\sum_i \frac{q_i}{c} \int_{a_i}^{b_i} ds_i\, u_i^\mu\, A_\mu(x) = -\frac{1}{c^2} \sum_i \int d^4x\; j_i^\mu(x) A_\mu(x),$$

wobei j_i^μ die Viererstromdichte einer einzelnen Punktladung q_i ist. Setzen wir

$$j^\mu(x) = \sum_i j_i^\mu(x),$$

so ergibt sich die allgemeine Form für die Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit einer Viererstromdichte j^μ zu

$$S_{\mathrm{WW}} = -\frac{1}{c^2} \int d^4x\; j^\mu(x) A_\mu(x).$$

Für die Konstruktion von S_{Felder} sollen die folgenden Forderungen erfüllt sein:

- Lorentz-Invarianz.
- Superpositionprinzip, d.h. das Ziel sind lineare Differentialgleichungen. Daher sollte der Integrand von S_{Felder} quadratisch in den Feldkomponenten sein.
- Physikalisch eindeutig, d.h. eichinvariant. Daher sollte der Integrand durch $F_{\mu\nu}$ und nicht durch A_μ gegeben sein.

Der einfachste Ansatz ist

$$S_{\mathrm{Felder}} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x\; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Betrachten wir also nun

$$S_{\mathrm{Felder}} + S_{\mathrm{WW}} = -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x\; F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{c^2} \int d^4x\; j^\mu(x) A_\mu(x)$$

Mit $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ erhalten wir

$$S_{\text{Felder}} + S_{\text{WW}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{8\pi c} \left(\partial_\mu A_\nu\right) \left(\partial^\mu A^\nu\right) + \frac{1}{8\pi c} \left(\partial_\mu A_\nu\right) \left(\partial^\nu A^\mu\right) - \frac{1}{c^2} j^\mu(x) A_\mu(x) \right]$$

Die Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{8\pi} \left(\partial_\mu A_\nu\right) \left(\partial^\mu A^\nu\right) + \frac{1}{8\pi} \left(\partial_\mu A_\nu\right) \left(\partial^\nu A^\mu\right) - \frac{1}{c} j^\mu(x) A_\mu(x)$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu\right)} = 0.$$

Somit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} j^\nu(x) + \frac{1}{4\pi} \partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu\right) - \frac{1}{4\pi} \partial_\mu \left(\partial^\nu A^\mu\right) &= 0, \\ \frac{1}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{c} j^\nu(x), \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{c} j^\nu(x). \end{aligned}$$

Wir erhalten die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen.

4.4 Zusammenfassung der Lagrangedichtenformulierung

Beschreibung des Systems von Teilchen und elektromagnetischen Feldern durch

$$S = S_{\text{Teilchen}} + S_{\text{Felder}} + S_{\text{WW}},$$

mit

$$\begin{aligned} S_{\text{Teilchen}} &= -mc \int_a^b ds, \\ S_{\text{Felder}} &= -\frac{1}{16\pi c} \int d^4x \, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ S_{\text{WW}} &= -\frac{1}{c^2} \int d^4x \, j^\mu(x) \, A_\mu(x) \end{aligned}$$

Für eine Punktladung gilt

$$j^\mu(x) = qc \int ds \, u^\mu(s) \, \delta^4(x - x'(s))$$

und der Wechselwirkungsterm reduziert sich auf

$$S_{\text{WW}} = -\frac{q}{c} \int_a^b dx^\mu \, A_\mu(x).$$

5 Erhaltungssätze

5.1 Die Hamiltondichte

In der letzten Vorlesung hatten wir eine allgemeine Lagrangedichte einer Feldtheorie

$$\mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x), j(x), x\right)$$

betrachtet. In Analogie zur klassischen Mechanik, wo der kanonisch konjugierte Impuls als

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

definiert ist, definiert man das zum Feld $\psi(x)$ **kanonisch konjugierte Impulsfeld** $\pi(x)$ als

$$\pi(x) = c \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_0 \psi(x)\right)}.$$

Die **Hamiltondichte** definiert man als Legendre-Transformation

$$\mathcal{H} = \frac{1}{c}\pi(x)\partial_0\psi(x) - \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x), j(x), x\right).$$

Als **Hamilton-Funktion** bezeichnen wir das Integral der Hamiltondichte über den dreidimensionalen Raum:

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}.$$

Beispiel 1:

$$\mathcal{L} = c\left[\frac{\hbar^2}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) - \frac{1}{2}m^2c^2\phi^2(x) + \rho(x)\phi(x)\right].$$

Diese Lagrangedichte beschreibt ein Klein-Gordon-Feld $\phi(x)$, d.h. ein Feld mit Spin 0 und Masse m. Die Größe $\rho(x)$ beschreibt eine externe Quelle. Es ist

$$\pi(x) = c^2\hbar^2\partial_0\phi(x)$$

und

$$\mathcal{H} = c\left[\frac{1}{2c^4\hbar^2}\pi^2(x) + \frac{\hbar^2}{2}\left(\vec{\nabla}\phi(x)\right)^2 + \frac{1}{2}m^2c^2\phi^2(x) - \rho(x)\phi(x)\right].$$

Bemerkung: Die Hamiltondichte ist nicht manifest Lorentz-invariant.

Beispiel 2: Die Lagrangedichte für die elektromagnetischen Felder

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(A_\mu, \partial_\mu A_\nu\right) &= -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\mu(x)\,A_\mu(x)\\ &= -\frac{1}{8\pi}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\left(\partial^\mu A^\nu\right) + \frac{1}{8\pi}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\left(\partial^\nu A^\mu\right) - \frac{1}{c}j^\mu(x)A_\mu(x)\end{aligned}$$

Es ist

$$\pi^\mu(x) = c\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0 A_\mu\right)} = -\frac{c}{4\pi}\partial^0 A^\mu + \frac{c}{4\pi}\partial^\mu A^0 = -\frac{c}{4\pi}F^{0\mu}.$$

Und daher

$$\begin{aligned} \pi^0 &= 0, \\ \pi^i &= \frac{c}{4\pi}E^i(x). \end{aligned}$$

Die Hamiltondichte ergibt sich zu

$$\mathcal{H} = \frac{1}{c}\pi^i \partial_0 A_i - \mathcal{L} = -\frac{1}{c}\pi^i \partial_0 A^i - \mathcal{L}.$$

Nebenrechnung: Aus

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(t,\vec{x}).$$

folgt

$$\partial_0 \vec{A} = \frac{\partial}{c\partial t}\vec{A} = -\vec{E} - \vec{\nabla}\Phi.$$

Nebenrechnung 2:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j^\mu(x)\,A_\mu(x) = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 - B^2\right) - \frac{1}{c}j^\mu(x)\,A_\mu(x)$$

Somit

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{c}\pi^i \partial_0 A^i - \mathcal{L} = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\left(\vec{E} + \vec{\nabla}\Phi\right) - \frac{1}{8\pi}\left(E^2 - B^2\right) + \frac{1}{c}j^\mu(x)\,A_\mu(x) \\ &= \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) + \frac{1}{c}j^\mu(x)\,A_\mu(x) + \frac{1}{4\pi}\vec{E}\,\vec{\nabla}\Phi \end{aligned}$$

Man nennt

$$\frac{1}{8\pi}\vec{E}^2$$

die **Energiedichte des elektrischen Feldes**, und

$$\frac{1}{8\pi}\vec{B}^2$$

die **Energiedichte des magnetische Feldes**. Man bezeichnet die Summe

$$u(t,\vec{x}) = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$$

als die **Energiedichte des elektromagnetischen Feldes**. Mittels partieller Integration erhält man für den letzten Term

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\int d^3x\,\vec{E}\,\vec{\nabla}\Phi &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3x\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\Phi \\ &= -\int d^3x\,\rho\,\Phi.\end{aligned}$$

und somit

$$H = \int d^3x\left[\frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)-\frac{1}{c}\vec{j}(x)\vec{A}(x)\right].$$

Bemerkung: Die Tatsache, daß $\pi^0 = 0$ wird in der Quantenelektrodynamik noch eine Rolle spielen, da man nicht naiv die Kommutationsrelation

$$\left[\pi^0(x), A^0(y)\right] = i\hbar\delta^3(x-y)$$

fordern kann.

5.2 Noethersche Erhaltungsgrößen

In der klassischen Mechanik haben wir das Noethertheorem kennengelernt, welches besagt, daß jeder kontinuierlichen Symmetrie der Lagrangefunktion eine Erhaltungsgröße entspricht. Wir wollen nun die Verallgemeinerung auf Felder und Lagrangedichten studieren. Wir betrachten ein Feld $\psi(x)$ mit zugehöriger Lagrangedichte

$$\mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu\psi(x)\right).$$

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $\mathcal{L}$ nur von $\psi(x)$ und $\partial_\mu\psi(x)$ abhängt, nicht aber explizit von x. Weiter betrachten wir eine Feldtransformation, die von einem Parameter $\alpha\in\mathbb{R}$ abhängt:

$$\psi(x) \;\to\; \psi'(x) = f(\psi(x), \alpha),$$

Auch hier beschränken wir uns auf den Fall, daß f nicht explizit von x abhängt. Wir setzen voraus, daß $\alpha = 0$ der Identität entspricht:

$$f(\psi(x), 0) = \psi(x).$$

Die Umkehrtransformation bezeichnen wir mit f^{-1}:

$$\psi(x) = f^{-1}\left(\psi'(x), \alpha\right).$$

Die transformierte Lagrangedichte ist dann

$$\mathcal{L}'\left(\psi'(x), \partial_\mu\psi'(x)\right) = \mathcal{L}\left(f^{-1}\left(\psi'(x),\alpha\right), \partial_\mu f^{-1}\left(\psi'(x),\alpha\right)\right).$$

Wir bezeichnen die Lagrangedichte als invariant, falls

$$\mathcal{L}'\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right) = \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right).$$

Äquivalent hierzu ist die Bedingung

$$\mathcal{L}\left(\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right) = \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right).$$

Da per Definition $\mathcal{L}'(\psi', \partial_\mu \psi') = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$ ist, folgt aus der zweiten Form der Bedingung $\mathcal{L}(\psi', \partial_\mu \psi') = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi)$ die Beziehung $\mathcal{L}(\psi', \partial_\mu \psi') = \mathcal{L}'(\psi', \partial_\mu \psi')$. Eine Umbenennung der Felder liefert dann die erste Form der Bedingung $\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) = \mathcal{L}'(\psi, \partial_\mu \psi)$.

Wir betrachten nun die Transformation für α nahe bei Null. Für α nahe bei Null gilt

$$\psi'(x) - \psi(x) = \delta\psi(x) = \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} f\left(\psi(x), \alpha\right)\Big|_{\alpha=0}.$$

Wir bezeichnen mit $\delta\mathcal{L}$ die Größe

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right) - \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right).$$

Ist $\mathcal{L}$ invariant unter der Transformation f, so gilt klarerweise $\delta\mathcal{L} = 0$. Andererseits findet man

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\partial_\mu \delta\psi \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\delta\psi\right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\right)\delta\psi \\
&= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\right]\delta\psi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\delta\psi\right).
\end{aligned}$$

Falls ψ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen ist, so verschwindet der erste Term. Ist die Lagrangedichte invariant unter der Transformation f, so folgt

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\delta\psi\right) = 0.$$

Nun ist $\delta\psi = \alpha(\partial f/\partial\alpha|_{\alpha=0})$, und wir können α herausdividieren, um einen von α unabhängigen Ausdruck zu erhalten: Wir setzen

$$J^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\left(\frac{\partial f\left(\psi(x), \alpha\right)}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}\right).$$

Die Größe $J^\mu(x)$ wird als **Strom** bezeichnet: Dieser Strom ist erhalten, d.h. die Vierer-Divergenz verschwindet:

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0.$$

Wir können das Noethertheorem auf Transformationen erweitern, die die Lagrangedichte bis auf Eichterme invariant lassen, d.h. Situationen in denen

$$\mathcal{L}\left(\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right) = \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right) + \partial_\mu \Lambda^\mu(x,\alpha) + O\left(\alpha^2\right),$$

mit $\Lambda^\mu(x,0) = 0$. Es ist nun

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\mathcal{L}\left(\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right) - \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right) - \partial_\mu \Lambda^\mu(x,\alpha)\right]\Big|_{\alpha=0} = 0$$

und man findet

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial \Lambda^\mu}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \right) = 0,$$

d.h. die Größe

$$J^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial \Lambda^\mu}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

ist ein erhaltener Strom.

Bemerkung: Man vergleiche diese Größe mit der entsprechenden Größe in der klassischen Mechanik: Ist

$$L\left(q', \dot{q}'\right) = L(q, \dot{q}) + \frac{d}{dt}\Lambda(t,\alpha) + O\left(\alpha^2\right),$$

so folgt in der klassischen Mechanik, daß die Größe

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}$$

erhalten ist.

Bemerkung 2: Wir betrachten noch einen wichtigen Spezialfall: Ist der Eichterm $\Lambda^\mu(x,\alpha)$ unabhängig von α, so ist

$$\frac{\partial \Lambda^\mu}{\partial \alpha} = 0,$$

und der erhaltene Strom ist wie im Fall ohne zusätzlichen Eichterm gegeben durch

$$J^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0}.$$

5.3 Translationsinvarianz und der Energie-Impuls-Tensor

In der bisherigen Diskussion des Noethertheorems hatten wir uns auf eine Invarianz der Lagrangedichte der Form

$$\mathcal{L}\left(\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right) \quad = \quad \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right)$$

beschränkt. (Die Erweiterung auf Invarianz bis auf Eichterme ist hier nicht weiter relevant.) Diese Form erlaubt uns nicht, vier wichtige Erhaltungssätze, die aus der Translationsinvarianz folgen, herzuleiten. Wir erinnern uns an die klassische Mechanik: Auch dort hatten wir zuerst das Noethertheorem für den Fall betrachtet, daß die Zeitvariable nicht transformiert wird. Wir haben dann das Noethertheorem auf den Fall erweitert, daß auch die Zeitvariable transformiert. Insbesondere haben wir für eine Lagrangefunktion, die nicht explizit von der Zeit abhängt, eine Zeittranslation betrachtet. Das Noethertheorem liefert dann die Energieerhaltung.

Wir wollen dies nun auf die Feldtheorie verallgemeinern und betrachten wieder eine Lagrangedichte

$$\mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right),$$

die nicht explizit von x abhängt. Als Transformation betrachten wir nun die Translationen

$$x^\mu \quad \rightarrow \quad x^{\mu\prime} = x^\mu + \alpha c^\mu.$$

Für das Feld gilt nun

$$\psi(x) \quad \rightarrow \quad \psi'(x) = \psi(x - \alpha c) = \psi(x) + \delta\psi(x),$$

mit

$$\delta\psi(x) \quad = \quad \psi'(x) - \psi(x) = \alpha \left. \frac{\partial}{\partial\alpha} \psi(x - \alpha c) \right|_{\alpha=0} = -\alpha c_\mu \partial^\mu \psi(x).$$

Es ist weiter

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \mathcal{L}\left(\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right) - \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\mu \psi(x)\right) \\
&= \alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} \mathcal{L}\left(\psi'(x), \partial_\mu \psi'(x)\right)\Big|_{\alpha=0} = \alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} \mathcal{L}\left(\psi(x-\alpha c), \partial_\mu \psi(x-\alpha c)\right)\Big|_{\alpha=0} \\
&= -\alpha c_\mu \partial^\mu \mathcal{L}\left(\psi(x), \partial_\nu \psi(x)\right)
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für die Größe $\delta\mathcal{L}$ gilt in diesem Fall im allgemeinen $\delta\mathcal{L} \neq 0$, außer die Lagrangedichte ist konstant. Wir können $\delta\mathcal{L}$ aber auch auf eine zweite Art berechnen:

$$\delta\mathcal{L} \quad = \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} \delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)} \partial_\mu \delta\psi.$$

Wie bei der ersten Herleitung des Noethertheorems können wir wieder die Euler-Lagrange-Gleichungen verwenden und finden

$$\delta\mathcal{L} \;=\; \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)}\delta\psi\right) = -\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)}\alpha c_\nu\partial^\nu\psi\right).$$

Nun können wir die beiden Ausdrücke für $\delta\mathcal{L}$ gleichsetzen und folgern

$$\begin{aligned}
-\alpha c_\nu\partial^\nu\mathcal{L}+\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)}\alpha c_\nu\partial^\nu\psi\right) &= 0,\\
\alpha c_\nu\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)}\partial^\nu\psi\right)-g^{\nu\mu}\partial_\mu\mathcal{L}\right] &= 0,\\
\alpha c_\nu\partial_\mu\left[\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)}\partial^\nu\psi\right)-g^{\nu\mu}\mathcal{L}\right] &= 0,
\end{aligned}$$

Man nennt das Tensorfeld

$$T^{\mu\nu} \;=\; \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi\right)}\partial^\nu\psi\right)-g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

den **kanonischen Energie-Impuls-Tensor**. $T^{\mu\nu}$ erfüllt die vier Erhaltungssätze

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} \;=\; 0.$$

Bemerkung: Treten mehrere Felder $\psi^{(i)}$ auf, so wird über alle Felder summiert:

$$T^{\mu\nu} \;=\; \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi^{(i)}\right)}\partial^\nu\psi^{(i)}\right)-g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

Bemerkung: Addiert man zu $T^{\mu\nu}$ einen Term

$$\partial_\rho B^{\mu\rho\nu},$$

wobei $B^{\mu\rho\nu}$ antisymmetrisch in μ und ρ ist,

$$B^{\rho\mu\nu} \;=\; -B^{\mu\rho\nu},$$

so gilt ebenfalls

$$\partial_\mu\left(T^{\mu\nu}+\partial_\rho B^{\mu\rho\nu}\right) \;=\; 0.$$

Der kanonische Energie-Impuls-Tensor gibt also noch keine eindeutige Erhaltungsgröße. Zur Eindeutigkeit betrachten wir den Drehimpuls. Vorbemerkung: Die relativistische Verallgemeinerung des Drehimpulses

$$\vec{M} \;=\; \vec{x}\times\vec{p}$$

ist durch

$$M^{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{2}\left(x^{\mu}p^{\nu}-x^{\nu}p^{\mu}\right)$$

gegeben. An $T^{\mu\nu}$ stellt man nun die Zusatzforderung, daß mit der Definition der Drehimpulsdichte

$$M^{\mu\nu\rho} \;=\; T^{\mu\nu}x^{\rho}-T^{\mu\rho}x^{\nu}$$

gilt:

$$\partial_{\mu}M^{\mu\nu\rho} \;=\; 0.$$

Dies bedeutet

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu}M^{\mu\nu\rho} &= \partial_{\mu}\left(T^{\mu\nu}x^{\rho}-T^{\mu\rho}x^{\nu}\right)=\left(\partial_{\mu}T^{\mu\nu}\right)x^{\rho}+T^{\rho\nu}-\left(\partial_{\mu}T^{\mu\rho}\right)x^{\nu}-T^{\nu\rho}\\
&= T^{\rho\nu}-T^{\nu\rho}=0.
\end{aligned}$$

Also

$$T^{\mu\nu}=T^{\nu\mu},$$

d.h. der Energie-Impuls-Tensor muß symmetrisch sein.

5.4 Der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes

Wir betrachten des elektromagnetische Feld ohne äußere Quellen:

$$\mathcal{L}\left(A_{\mu},\partial_{\mu}A_{\nu}\right) \;=\; -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Wir finden

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\tau}\right)}\partial^{\nu}A_{\tau}\right)-g^{\mu\nu}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4\pi}\left(\partial^{\mu}A^{\tau}\right)\left(\partial^{\nu}A_{\tau}\right)+\frac{1}{4\pi}\left(\partial^{\tau}A^{\mu}\right)\left(\partial^{\nu}A_{\tau}\right)+\frac{1}{16\pi}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\tau}\left(-\partial^{\nu}A_{\tau}\right)+\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right]\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\tau}\left(\partial_{\tau}A^{\nu}-\partial^{\nu}A_{\tau}\right)+\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}-F^{\mu\tau}\partial_{\tau}A^{\nu}\right]\\
&= \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\tau}F_{\tau}{}^{\nu}+\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right]-\frac{1}{4\pi}F^{\mu\tau}\partial_{\tau}A^{\nu}.
\end{aligned}$$

Nun ist allerdings, da wir keine äußeren Quellen betrachten

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} \;=\; 0,$$

und daher

$$-\frac{1}{4\pi}F^{\mu\tau}\partial_\tau A^\nu \;=\; -\frac{1}{4\pi}\partial_\tau\left(F^{\mu\tau}A^\nu\right).$$

Dieser Term ist eine Vierer-Divergenz und stellt somit einen Oberflächenterm dar. Darüber hinaus ist dieser Term von der Form

$$\partial_\rho B^{\mu\rho\nu}$$

mit

$$B^{\mu\rho\nu} \;=\; -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\rho}A^\nu.$$

Klarerweise gilt $B^{\mu\rho\nu} = -B^{\rho\mu\nu}$, da $F^{\mu\rho} = -F^{\rho\mu}$.

Der symmetrische Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes lautet:

$$T^{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\tau}F_\tau{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right].$$

Für die expliziten Einträge erhält man

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right) = u(t,\vec{x}),\\
T^{i0} &= \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)^i = \frac{1}{c}S^i(t,\vec{x}),\\
T^{ij} &= -\frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}^i\vec{E}^j+\vec{B}^i\vec{B}^j-\frac{1}{2}\delta^{ij}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)\right].
\end{aligned}$$

$u(t,\vec{x})$ die **Energiedichte des elektromagnetischen Feldes**. Den Vektor $\vec{S} = (S^1,S^2,S^3)$ bezeichnet man als **Poyntingscher Vektor**. Er beschreibt die Impulsdichte bzw. die Flußdichte der Energie. Die rein räumlichen Komponenten T^{ij} bezeichnet man als **Maxwellscher Spannungstensor**.

Nun betrachten wir zusätzlich äußere Quellen:

$$\mathcal{L} \;=\; -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j_\mu A^\mu$$

Wir behalten die Definition des Energie-Impuls-Tensors bei

$$T^{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\tau}F_\tau{}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right].$$

Für dessen Divergenz finden wir nun

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}\left[\partial^\mu\left(F_{\mu\tau}F^{\tau\nu}\right)+\frac{1}{4}\partial^\nu\left(F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\left(\partial^\mu F_{\mu\tau}\right)F^{\tau\nu}+F_{\mu\tau}\partial^\mu F^{\tau\nu}+\frac{1}{2}F_{\rho\sigma}\partial^\nu F^{\rho\sigma}\right] \\
&= \frac{1}{c}j_\tau F^{\tau\nu}+\frac{1}{4\pi}\left[F_{\mu\tau}\partial^\mu F^{\tau\nu}+\frac{1}{2}F_{\mu\tau}\partial^\nu F^{\mu\tau}\right] \\
&= -\frac{1}{c}F^{\nu\mu}j_\mu+\frac{1}{8\pi}F_{\mu\tau}\left[\partial^\mu F^{\tau\nu}-\partial^\tau F^{\nu\mu}\right] \\
&= -\frac{1}{c}F^{\nu\mu}j_\mu+\frac{1}{8\pi}F_{\mu\tau}\left[\partial^\mu F^{\tau\nu}+\partial^\tau F^{\mu\nu}\right] \\
&= -\frac{1}{c}F^{\nu\mu}j_\mu.
\end{aligned}$$

Bei der Umformung von der dritten auf die vierte Zeile haben wir die homogenen Maxwellschen Gleichungen

$$\partial^\mu F^{\tau\nu}+\partial^\tau F^{\nu\mu}+\partial^\nu F^{\mu\tau} = 0$$

verwendet. Ausgeschrieben für die zeitliche Komponente erhält man

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}u+\vec{\nabla}\vec{S}\right) = -\frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{j},$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t}u+\vec{\nabla}\vec{S}+\vec{E}\cdot\vec{j} = 0.$$

6 Elektrostatik

Für zeitunabhängige Probleme zerfallen die Maxwellschen Gleichungen in zwei unabhängige Teile. Die Gleichungen für das statische elektrische Feld:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x}) &= 4\pi\rho(\vec{x}),\\ \vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Die Gleichungen für das statische magnetische Feld:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x}),\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Bemerkung: Offensichtlich ist es für zeitunabhängige Phänomene sinnvoller, nicht die kovariante Form zu verwenden.

Ein typisches Problem der Elektrostatik ist, das elektrische Feld aus einer vorgegebenen Ladungsverteilung zu berechnen.

Wie bereits bekannt, läßt sich das elektrische Feld im statischen Fall als der Gradient eines skalaren Potentials schreiben:

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}).$$

Einsetzen in die inhomogenen Maxwellsche Gleichung liefert:

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = -4\pi\rho(\vec{x}).$$

Diese Gleichung nennt man die Poisson-Gleichung. Allgemein erhält man die Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktionen. Für die Poisson-Gleichung lautet die zugehörige Differentialgleichung für die Greensche Funktion

$$\Delta_x G(\vec{x},\vec{x}') = \delta(\vec{x}-\vec{x}').$$

Die Greensche Funktion ist gegeben durch

$$G(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Eine Lösung der Poisson-Gleichung ist somit

$$\Phi(x) = -4\pi\int d^3x'\rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}') = \int d^3x'\,\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Bemerkung: Die Lösung der Poisson-Gleichung ist nicht eindeutig, wir können zu dieser Lösung immer eine Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = 0$$

addieren. Diese homogene Gleichung nennt man die Laplace-Gleichung.

Für ein System von Punktladungen ist

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

und somit

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}$$

6.1 Multipolentwicklung

Problemstellung: Beschreibung des Feldes einer gegebenen Ladungsverteilung in großen Entfernungen.

Praktische Anwendung: Rekonstruktion der Ladungsverteilung von Kernen, Atomen oder Molekülen aus der Wechselwirkung mit einem äußeren Feld.

Wir betrachten daher eine Ladungsverteilung, die in einem begrenzten Gebiet lokalisiert ist. Außerhalb dieses Gebiets gilt daher die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) = 0.$$

Ziel der Methode der Multipolentwicklung ist es, einen Satz von Grundlösungen der Laplace-Gleichung zu finden,

- der vollständig ist, d.h. jede Lösung läßt sich als Linearkombination dieser Basislösungen darstellen;
- und so daß die Entwicklung in diesen Basisfunktionen eine systematische Entwicklung nach (inversen) Potenzen des Abstandes ist, so daß für große Abstände höhere Terme in dieser Entwicklung nicht so wichtig sind.

Es ist naheliegend, sphärische Koordinaten zu verwenden:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten lautet:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\Phi + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Phi + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\Phi + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi = 0. \end{aligned}$$

Wir machen nun den Ansatz, daß die Lösung faktorisiert

$$\Phi(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{r}U(r)P(\theta)Q(\varphi).$$

Bemerkung: Diese Vereinfachung läß sich a posteriori rechtfertigen, da sie zu einem vollständigen Satz von Funktionen führt. Einsetzen liefert

$$\frac{1}{r}PQ\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^3\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{UP}{r^3\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} \;=\; 0.$$

Multiplikation mit $r^3\sin^2\theta/(UPQ)$ liefert:

$$r^2\sin^2\theta\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{\sin\theta}{P}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} \;=\; 0.$$

Nun hängt nur der dritte Term von φ ab. Daher muß dieser Term gleich einer Konstanten sein, die wir als $-m^2$ wählen:

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\varphi^2} \;=\; -m^2.$$

Einsetzen liefert nun:

$$r^2\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \left[\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] \;=\; 0.$$

Analog folgert nun, da nur die Terme in der Klammer von θ abhängen, dass

$$\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \;=\; -l(l+1)$$

gilt. Hierbei ist $-l(l+1)$ eine weitere Konstante. Zusammenfassend haben wir also

$$\begin{aligned}
\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}U &= 0,\\
\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P &= 0,\\
\frac{d^2Q}{d\varphi^2} + m^2Q &= 0.
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für $Q(\varphi)$ hat die Lösungen

$$Q(\varphi) \;=\; e^{\pm im\varphi}$$

Die Eindeutigkeit erfordert, daß m ganzzahlig ist.
Die Differentialgleichung für $U(r)$ hat die Lösungen

$$U(r) \;=\; c^{(1)}r^{l+1} + \frac{c^{(2)}}{r^l},$$

Der erste Term ist zu verwenden, falls die Lösung bei $r = 0$ regulär sein soll, der zweite Term ist zu verwenden, wenn Regularität im Unendlichen gefordert wird.

Bemerkung: Wir sind hier an Lösungen interesiert, die regulär im Unendlichen sind. Daher fallen die Lösungen wie $1/r^l$ mit dem Abstand r ab. Für große Abstände sind daher die Lösungen mit kleinem l relevant.

Um die Lösung für $P(\theta)$ zu finden, verwendet man die Substitution

$$x = \cos\theta.$$

Dies ergibt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P = 0.$$

Diese Gleichung nennt sich verallgemeinerte Legendre-Gleichung. Die (normale) Legendre-Gleichung hat die Form

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{dP}{dx}\right] + l(l+1)P = 0.$$

6.2 Orthogonale Funktionen

Auf einem reellen Funktionenraum $\mathcal{F}$ ist ein Skalarprodukt ein bilineares Funktional, welches für $f, g \in \mathcal{F}$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned}
(f+g,h) &= (f,h)+(g,h) \\
(\alpha f,g) &= \alpha(f,g) \\
(f,g) &= (g,f) \\
(f,f) &> 0 \text{ falls } \; f \neq 0.
\end{aligned}$$

Ein wichtiges Beispiel ist für den Vektorraum der Polynomfunktionen durch

$$(f,g) = \int\limits_a^b w(x) f(x) g(x) dx$$

mit einer positiven Gewichtsfunktion $w(x)$ gegeben.

Die Legendre Polynome $P_l(x)$ sind mit der Gewichtsfunktion $w(x) = 1$ auf dem Intervall $[-1,1]$ definiert, d.h.

$$\int\limits_{-1}^{1} dx\, P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}.$$

(Der Faktor $2/(2l+1)$ auf der rechten Seite ist hierbei Konvention.) Wie schon erwähnt, sind sie Lösungen der Differentialgleichung:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

Außerdem erfüllen sie die Rekursionformel

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ (l+1)P_{l+1}(x) &= (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x). \end{aligned}$$

Desweitern lassen sie sich aus der Formel von Rodrigues bestimmen:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l.$$

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, sie aus der erzeugenden Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)z^l, \quad -1 \le x \le 1, \ |z| < 1$$

zu gewinnen. Die assozierten Legendre-Funktionen $P_{lm}(x)$ sind für $0 \le m \le l$ gegeben durch

$$P_{lm}(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x).$$

Für $-l \le m < 0$ setzen wir

$$P_{lm}(x) = (-1)^{-m} P_{l|m|}(x).$$

Diese Funktionen erfüllen die Differenzialgleichung

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] P_{lm}(x) = 0.$$

Wie bei den Legendrepolynomen ist l eine nicht-negative ganze Zahl und m nimmt die Werte $-l, -(l-1), ..., 0, ..., (l-1), l$ an. Außerdem haben wir die Relation

$$P_{lm}(-x) = (-1)^{l+m}P_{lm}(x)$$

Die Kugelflächenfunktionen sind definiert durch

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_{lm}(\cos\vartheta)\, e^{im\varphi}.$$

Sie erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}(\vartheta,\varphi)^* Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

und die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)^* Y_{lm}(\vartheta',\varphi') \quad = \quad (\sin\vartheta)^{-1}\delta(\vartheta-\vartheta')\delta(\varphi-\varphi').$$

Es gilt

$$Y_{l,-m}(\vartheta,\varphi) \quad = \quad (-1)^m Y_{lm}(\vartheta,\varphi)^*$$

Die Kugelflächenfunktionen für $l = 0,1,2$ lauten ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \\
Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{i\varphi}, \\
Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\vartheta-1\right), \\
Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta e^{i\varphi}, \\
Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\vartheta e^{2i\varphi}.
\end{aligned}$$

Wichtig ist das Additionstheorem:

$$P_l(\cos\alpha) \quad = \quad \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

wobei (θ,φ) die Polarkoordinaten des Einheitsvektors $\hat{x}$ sind, (θ',φ') die Polarkoordinaten des Einheitsvektors $\hat{x}'$ sind, und α den Winkel zwischen $\hat{x}$ und $\hat{x}'$ bezeichnet.

Somit haben wir für die Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{x}) \quad = \quad 0$$

die folgende allgemeine Lösung

$$\Phi(\vec{x}) \quad = \quad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[c_{lm}^{(1)}r^l + \frac{c_{lm}^{(2)}}{r^{l+1}}\right]P_{lm}(\cos\theta)\,e^{im\varphi} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[c_{lm}^{(1)'}r^l + \frac{c_{lm}^{(2)'}}{r^{l+1}}\right]Y_{lm}(\theta,\varphi)\,.$$

Hierbei sind $c_{lm}^{(1)}$ und $c_{lm}^{(2)}$ bzw. $c_{lm}^{(1)'}$ und $c_{lm}^{(2)'}$ Konstanten, die aus den Randbedingungen bestimmt werden.

Wir fassen unsere bisherigen Erkenntnisse kurz zusammen: In der Elektrostatik ist die Physik durch die Poisson-Gleichung bestimmt:

$$\Delta\Phi(\vec{x}) \quad = \quad -4\pi\rho(\vec{x}).$$

Eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung erhalten wir mit Hilfe der Technik der Greenschen Funktionen. Da wir zu einer speziellen Lösung immer eine Lösung der homogenen Gleichung addieren können, ergibt sich

$$\Phi(x) \quad = \quad \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \text{Lösung der homogenen Gleichung.}$$

Die homogene Differentialgleichung wird als Laplace-Gleichung bezeichnet:

$$\Delta\Phi(\vec{x}) \quad = \quad 0$$

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in sphärischen Koordinaten lautet:

$$\Phi(\vec{x}) \quad = \quad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[c_{lm}^{(1)} r^l + \frac{c_{lm}^{(2)}}{r^{l+1}}\right] P_{lm}(\cos\theta)\, e^{im\varphi} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[c_{lm}^{(1)\prime} r^l + \frac{c_{lm}^{(2)\prime}}{r^{l+1}}\right] Y_{lm}(\theta,\varphi)\,.$$

Die Basisfunktionen dieser Entwicklung bilden ein vollständiges Funktionensystem. Die Konstanten in dieser Entwicklung werden durch die Randbedinungen bestimmt. Betrachten wir ein Ladungsdichte, die in einem begrenzten Gebiet lokalisiert und ohne weitere Randbedingungen wie Leiterflächen, auf denen Ladungen induziert werden können, so ergibt sich $c_{lm}^{(1)} = c_{lm}^{(2)} = 0$ und die Lösung reduziert sich auf

$$\Phi(x) \quad = \quad \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

Im Außenraum erfüllt diese Lösung $\Delta\Phi = 0$ und läßt sich daher als Linearkombination der Basisfunktionen der homogenen Differentialgleichung darstellen. Diese Entwicklung wollen wir nun betrachten.

6.3 Elektrostatische Probleme mit Axialsymmetrie

Für Probleme, die um eine Richtung im Raum axialsymmetrisch sind, ist es sinnvoll, die z-Achse in diese Richtung zu legen. In diesem Fall ist das Potential unabhängig vom Azimuthwinkel φ und es treten nur Kugelflächenfunktionen mit $m = 0$ auf.

$$\Phi(x) \quad = \quad \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\left[c_l^{(1)} r^l + \frac{c_l^{(2)}}{r^{l+1}}\right] P_l(\cos\theta)$$

Unser Ziel ist es, die Koeffizienten $c_l^{(1)}$ und $c_l^{(2)}$ zu bestimmen. Da die θ-Abhängigkeit durch $P_l(\cos\theta)$ festliegt, ist es ausreichend, $\cos\theta = 1$ zu betrachten.

Da $\vec{x}$ nur im Nenner auftritt, benötigen wir die Entwicklung von $1/|\vec{x}-\vec{x}'|$ in Potenzen von r. Hier finden wir zunächst

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\alpha}} = \sum_{l=0}^{\infty}\left[\tilde{c}_l^{(1)} r^l + \frac{\tilde{c}_l^{(2)}}{r^{l+1}}\right] P_l\left(\cos\alpha\right),$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ ist. Wir betrachten zunächst den Fall $\cos\alpha = 1$. Es gilt $P_l(1) = 1$.

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|r-r'|}$$

Für $r' > r$ gilt:

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r'}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^l .$$

Für $r' < r$ gilt:

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l .$$

Wir führen die folgende Bezeichnung ein

$$\begin{aligned} r_< = r, \quad r_> = r' \qquad & \text{für} \quad r < r', \\ r_< = r', \quad r_> = r \qquad & \text{für} \quad r > r'. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<}{r_>}\right)^l ,$$

und daher

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l\left(\cos\alpha\right).$$

Um nun $c_l^{(1)}$ und $c_l^{(2)}$ zu bestimmen, betrachten wir $\cos\theta = 1$. Es ist dann $\cos\alpha = \cos\theta'$, und wir erhalten

$$\Phi(r,\theta,\varphi)|_{\theta=0} = \int d^3x' \frac{\rho\left(r',\theta'\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 2\pi\int_0^{\infty} dr' \int_0^{\pi} d\theta'\, r'^2 \,\sin\theta'\,\rho\left(r',\theta'\right)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l\left(\cos\theta'\right).$$

Im Außenraum ist $r > r'$ und wir erhalten

$$\Phi(r,\theta,\varphi)|_{\theta=0} = 2\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^{l+1}}\int\limits_0^\infty dr'\int\limits_0^\pi d\theta'\ \left(r'\right)^{l+2}\ \sin\theta'\ \rho\left(r',\theta'\right)P_l\left(\cos\theta'\right).$$

Somit

$$c_l^{(1)} = 0, \qquad c_l^{(2)} = 2\pi\int\limits_0^\infty dr'\int\limits_0^\pi d\theta'\ \left(r'\right)^{l+2}\ \sin\theta'\ \rho\left(r',\theta'\right)P_l\left(\cos\theta'\right).$$

Für eine kugelsymmetrische Ladungsdichte ergeben sich weitere Vereinfachungen. Wir betrachten nun als ein einfaches Beispiel das Potential einer kugelsymmetrischen Ladungsdichte.

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int d^3x'\frac{\rho(r')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 2\pi\int\limits_0^\infty dr'\int\limits_0^\pi d\theta'\ \sin\theta'\, r'^2\ \rho(r')\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l\left(\cos\theta'\right) \\
&= 2\pi\sum_{l=0}^{\infty}\int\limits_0^\infty dr'\ r'^2\ \rho(r')\ \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\int\limits_{-1}^{1} du P_l\left(u\right) \\
&= 4\pi\int\limits_0^\infty dr'\ \frac{r'^2\ \rho(r')}{r_>} \\
&= 4\pi\left[\frac{1}{r}\int\limits_0^r dr'\ r'^2\ \rho(r') + \int\limits_r^\infty dr' r'\rho(r')\right].
\end{aligned}$$

Diese Formel ist sowohl im Innen- als auch im Außenraum gültig. Im Außenraum ist $\rho(r') = 0$ für $r' > r$, daher trägt nur der erste Term bei:

$$\Phi(x) = \frac{4\pi}{r}\int\limits_0^\infty dr'\ r'^2\ \rho(r').$$

Hierbei haben wir die obere Integrationsgrenze auf Unendlich gesetzt, wegen $\rho(r') = 0$ für $r' > r$ ändert dies nichts.

6.4 Allgemeine Anordnung ohne Axialsymmetrie

Mit Hilfe des Additionstheorems läßt die Entwicklung der inversen Abstandsfunktion schreiben als

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l\left(\cos\alpha\right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi),
\end{aligned}$$

Somit ist also

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi) \int_0^{\infty} dr' (r')^2 \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \int\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\rho(\vec{x}').
\end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Formel gilt sowohl für den Innen- als auch den Außenraum. Das Radialintegral spaltet man wieder in zwei Teile auf:

$$\int_0^{\infty} dr' = \int_0^{r} dr' + \int_r^{\infty} dr'.$$

Betrachtet man nur den Außenraum, so gilt immer $r > r'$ und die Formel vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi) \frac{1}{r^{l+1}} \int_0^{r} dr' (r')^{l+2} \int\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\rho(\vec{x}') \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi) \frac{1}{r^{l+1}} \underbrace{\int_0^{\infty} dr' (r')^{l+2} \int\int d\Omega' Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\rho(\vec{x}')}_{q_{lm}}.
\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir die obere Grenze der Radialintegration auf Unendlich gesetzt. Dies ist erlaubt, da die Ladungsdichte ganz im Endlichen liegt und für $r' > r$ verschwindet. Man nennt die Größen

$$q_{lm} = \int_0^{\infty} dr r^{l+2} \int\int d\Omega Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\rho(\vec{x}) = \int d^3x r^l Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\rho(\vec{x})$$

die **Multipolmomente** der Ladungsverteilung $\rho(\vec{x}')$. Somit

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\varphi) \frac{q_{lm}}{r^{l+1}}.$$

Diese Formel besagt, daß die Eigenschaften der Quelle, die durch die Multipolmomente q_{lm} beschrieben werden, in der funktionalen Abhängigkeit des Potentials vom Aufpunkt $\vec{x}$ faktorisieren.

Es gilt

$$q_{lm}^* = (-1)^m q_{l\,(-m)}$$

In der Anwendung sind die niedrigsten Multipolmomente $l = 0$, $l = 1$ und $l = 2$ am wichtigsten. Diese wollen wir etwas ausführlicher diskutieren.

Für $l=0$ gibt es nur ein Multipolmoment:

$$q_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\int d^3x\,\rho(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}Q,$$

wobei Q die Gesamtladung ist.

Für $l=1$ gibt es drei Multipolmomente, von denen nur zwei wirklich berechnet werden müssen:

$$\begin{aligned} q_{11} &= \int d^3x\, rY_{11}^*(\hat{x})\rho(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\int d^3x\left(x^1 - ix^2\right)\rho(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\left(d^1 - id^2\right), \\ q_{10} &= \int d^3x\, rY_{10}^*(\hat{x})\rho(\vec{x}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\int d^3x\, x^3\rho(\vec{x}) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}d^3. \end{aligned}$$

d^i sind die Komponenten des **Dipolmoments**

$$\vec{d} = \int d^3x\,\vec{x}\rho(\vec{x})$$

Ebenso definiert man das **Quadrupolmoment** Q^{ij} als

$$Q^{ij} = \int d^3x\left(3x^ix^j - r^2\delta^{ij}\right)\rho(\vec{x}).$$

Das Quadrupolmoment hängt mit den Multipolmomenten mit $l=2$ wie folgt zusammen: Zunächst hat man

$$\begin{aligned} q_{22} &= \int d^3x\, r^2Y_{22}^*(\hat{x})\rho(\vec{x}) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\int d^3x\left(x^1 - ix^2\right)^2\rho(\vec{x}), \\ q_{21} &= \int d^3x\, r^2Y_{21}^*(\hat{x})\rho(\vec{x}) = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\int d^3x\left(x^1 - ix^2\right)x^3\rho(\vec{x}), \\ q_{20} &= \int d^3x\, r^2Y_{20}^*(\hat{x})\rho(\vec{x}) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int d^3x\left(3(x^3)^2 - r^2\right)\rho(\vec{x}). \end{aligned}$$

Dann findet man

$$\begin{aligned} q_{22} &= \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{6\pi}}\left(Q^{11} - 2iQ^{12} - Q^{22}\right), \\ q_{21} &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6\pi}}\left(-Q^{13} + iQ^{23}\right), \\ q_{20} &= \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{\pi}}Q^{33}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Allgemein bezeichnet man als 2^l-Pol, den Beitrag, der von dem l-ten Term in der Entwicklung von $1/|\vec{x}-\vec{x}'|$ herrührt.

Bemerkung 2: Man kann einen Dipol exakt realisieren, indem man zwei entgegengesetzte Ladungen λQ und $-\lambda Q$ an den Orten $\frac{1}{2\lambda}\vec{a}$ und $-\frac{1}{2\lambda}\vec{a}$ aufstellt und den Grenzübergang $\lambda \to \infty$ durchführt.
Man kann einen Quadrupol exakt realisieren, indem man zwei entgegengesetzte Dipole $\lambda\vec{d}$ und $-\lambda\vec{d}$ and den Orten $\frac{1}{2\lambda}\vec{a}$ und $-\frac{1}{2\lambda}\vec{a}$ aufstellt und den Grenzübergang $\lambda \to \infty$ durchführt.
Allgemeiner kann man einen 2^l-Pol exakt realisieren, indem man zwei entgegengesetzte 2^{l-1}-Pole λQ_{l-1} und $-\lambda Q_{l-1}$ an den Orten $\frac{1}{2\lambda}\vec{a}$ und $-\frac{1}{2\lambda}\vec{a}$ aufstellt und den Grenzübergang $\lambda \to \infty$ durchführt.

Das Monopol-, Dipol- und das Quadrupolmoment sind wichtig in der Anwendung. Man betrachtet

$$\Phi(x) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

und entwickelt um die Stelle $\vec{x}' = 0$. Man hat mit $r = |\vec{x}|$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^{3} \frac{x^i}{r^3} x'^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}}{r^5} x'^i x'^j + O(x'^3).$$

Somit

$$\Phi(x) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{d}\cdot\vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} Q^{ij} \frac{x^i x^j}{r^5} + \dots$$

Bemerkung:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \left(3x^i x^j - r^2 \delta^{ij}\right) x'^i x'^j = 3\left(\vec{x}\cdot\vec{x}'\right)^2 - r^2 r'^2 = \sum_{i,j=1}^{3} \left(3x'^i x'^j - r'^2 \delta^{ij}\right) x^i x^j$$

Anwendung: Wir betrachten ein Objekt mit der Ladungsverteilung $\rho_1(\vec{x})$ in einem äußeren elektrischen Feld, daß von dem Potential $\Phi_2(\vec{x})$ erzeugt wird.

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{WW}} &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x\, 2\vec{E}_1 \vec{E}_2 = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \vec{E}_1\, \vec{\nabla}\phi_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \vec{\nabla} \left(\vec{E}_1\, \phi_2\right) + \frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \left(\vec{\nabla}\vec{E}_1\right) \phi_2, \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3x\, \left(\vec{\nabla}\vec{E}_1\right) \phi_2 \\ &= \int d^3x\, \rho_1 \phi_2, \end{aligned}$$

Das Potential $\Phi_2(\vec{x})$ entwickeln wir um $\vec{x} = 0$:

$$\Phi_2(\vec{x}) = \Phi_2(0) + \vec{x}\cdot\vec{\nabla}\Phi_2(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} x^i x^j \frac{\partial^2 \Phi_2(0)}{\partial x^i \partial x^j} + \dots$$

Da $E_2(\vec{x})$ an der Stelle $\vec{x}=0$ keine Quellen haben soll, können wir einen Term $1/6r^2\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2(0)$ dazuaddieren:

$$\Phi_2(\vec{x}) \quad = \quad \Phi_2(0)-\vec{x}\cdot\vec{E}_2(0)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}x^i x^j\frac{\partial E_2^j(0)}{\partial x^i}+\frac{1}{6}r^2\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2(0)+\ldots$$

Somit erhält man

$$U_{\mathrm{WW}} \quad = \quad Q_1\Phi_2(0)-\vec{d}_1\cdot\vec{E}_2(0)-\frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}Q_1^{ij}\frac{\partial E_2^j(0)}{\partial x^i}+\ldots$$

Der erste Term ist, wie erwartet, das Produkt aus der Ladung und dem Potential am Ursprung. Der zweite Term gibt die Energie eines elektrischen Dipols im äußeren elektrischen Feld. Der dritte Term gibt die Energie eines Quadrupols in einem Feldgradienten.

Wir fassen den Sachverhalt zusammen: Das Potential im Außenraum einer Ladungsverteilung läßt sich schreiben als

$$\Phi(x) \quad = \quad \sum_{l=0}^{\infty}\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\theta,\varphi)\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}.$$

Die Multipolmomente q_{lm} sind gegeben durch

$$q_{lm} \quad = \quad \int d^3x\, r^l\, Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\,\rho(\vec{x}).$$

Für $l=0$ ist das Multipolelement q_{00} proportional zur Gesamtladung Q. Die Multipolmomente für $l=1$ lassen sich durch das Dipolmoment

$$\vec{d} \quad = \quad \int d^3x\,\vec{x}\,\rho(\vec{x})$$

ausdrücken. Die Multipolmomente für $l=2$ lassen sich durch das Quadrupolmoment

$$Q^{ij} \quad = \quad \int d^3x\left(3x^i x^j-r^2\delta^{ij}\right)\rho(\vec{x}).$$

ausdrücken.

Wechselwirkungsenergie eines Objektes mit einer Ladungsverteilung $\rho_1(\vec{x})$ in einem äußeren Feld $\vec{E}_2(\vec{x})=-\vec{\nabla}\Phi_2(\vec{x})$:

$$U_{\mathrm{WW}} \quad = \quad Q_1\Phi_2(0)-\vec{d}_1\cdot\vec{E}_2(0)-\frac{1}{6}\sum_{i,j=1}^{3}Q_1^{ij}\frac{\partial E_2^j(0)}{\partial x^i}+\ldots$$

6.5 Das Feld eines elektrischen Dipols

Wir betrachten einen idealisierten Dipol mit Dipolmoment $\vec{d}$ am Ursprung $\vec{x} = \vec{0}$. Für das Potential gilt im Außenraum

$$\Phi_{\text{Dipol}} = \frac{\vec{d}\cdot\vec{x}}{|x|^3}.$$

Für einen idealisierten Dipol besteht der Außenraum aus allen Punkten $\vec{x} \neq \vec{0}$. Im Außenraum ist das elektrische Feld durch den (negativen) Gradienten des Potentials gegeben:

$$-\vec{\nabla}\Phi_{\text{Dipol}} = \frac{3\left(\hat{x}\cdot\vec{d}\right)\hat{x} - \vec{d}}{|\vec{x}|^3}.$$

Das elektrische Feld kann sich nur im Innenraum von diesem Ausdruck unterscheiden. Der Innenraum besteht im vorliegenden Fall nur aus dem Punkt $\vec{x} = \vec{0}$. Es tritt nun tatsächlich ein nur für $\vec{x} = \vec{0}$ von Null verschiedener Zusatzterm auf. Das Feld eines elektrischen Dipols ist im gesamten Raum gegeben durch

$$\vec{E}_{\text{Dipol}} = \frac{3\left(\hat{x}\cdot\vec{d}\right)\hat{x} - \vec{d}}{|\vec{x}|^3} - \frac{4\pi}{3}\vec{d}\delta(\vec{x}).$$

Der zur δ-Distribution proportionale Zusatz garantiert, daß das Integral über die Feldstärke

$$\int d^3x\, \vec{E}_{\text{Dipol}} = -\frac{4\pi}{3}\vec{d}$$

ergibt. Wir zeigen zunächst, daß dieses Integral das obige Ergebnis liefern muß, indem wir das Volumenintegral mit Hilfe des Satzes von Gauß in ein Oberflächenintegral umschreiben. In einer zweiten Rechnung berechnen wir das Integral direkt, und werden sehen, daß der Zusatzterm für eine Übereinstimmung mit dem ersten Ergebnis benötigt wird.

Wir beginnen mit der ersten Rechnung und betrachten das Volumenintegral über eine (große) Kugel mit Radius R (am Ende werden wir ohne Probleme den Grenzwert $R \to \infty$ nehmen können):

$$\int\limits_{r<R} d^3x\, \vec{E}_{\text{Dipol}} = -\int\limits_{r<R} d^3x\, \vec{\nabla}\Phi_{\text{Dipol}} = -\int\limits_{r=R} R^2 d\Omega\, \vec{n}\, \Phi_{\text{Dipol}},$$

wobei $\vec{n} = \vec{x}/R$ der nach außen gerichtete Einheitsvektor ist. Im zweiten Schritt haben wir den Satz von Gauß verwendet (für die x-Komponente können wir das Vektorfeld $(\Phi, 0, 0)$ betrachten, für die y-Komponente das Vektorfeld $(0, \Phi, 0)$, etc.). Also ergibt sich

$$\int\limits_{r<R} d^3x\, \vec{E}_{\text{Dipol}} = -\int\limits_{r=R} R^2 d\Omega\, \vec{n}\, \frac{\left(\vec{d}\cdot\vec{x}\right)}{|x|^3} = -\int\limits_{r=R} d\Omega\, \vec{n}\, \left(\vec{d}\cdot\vec{n}\right)$$

Hier sehen wir bereits, daß das Ergebnis von R unabhängig ist. Im nächsten Schritt drücken wir $\vec{n}$ durch θ und φ aus:

$$\vec{n} \;=\; \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_2 + \cos\theta\,\vec{e}_3$$

Wählen wir noch das Koordinatensystem so, daß

$$\vec{d} \;=\; d\,\vec{e}_3,$$

so gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_{r<R} d^3x\,\vec{E}_{\mathrm{Dipol}} &= -\int\limits_{r=R} d\Omega\,\vec{n}\left(\vec{d}\cdot\vec{n}\right) = -d\vec{e}_3\int\limits_{r=R} d\Omega\,\cos^2\theta \\ &= -2\pi\vec{d}\int\limits_0^\pi d\theta\,\sin\theta\cos^2\theta = -\frac{4\pi}{3}\vec{d}.\end{aligned}$$

Das Ergebnis hängt nicht von R ab und wir können den Grenzwert $R\to\infty$ betrachten. Wir finden

$$\int d^3x\,\vec{E}_{\mathrm{Dipol}} \;=\; -\frac{4\pi}{3}\vec{d}.$$

Wir berechnen nun dieses Integral auf eine zweite Art, indem wir den Ausdruck für die Feldstärke

$$\vec{E}_{\mathrm{Dipol}} \;=\; \frac{3\left(\hat{x}\cdot\vec{d}\right)\hat{x}-\vec{d}}{|\vec{x}|^3} - \frac{4\pi}{3}\vec{d}\delta(\vec{x})$$

verwenden. Wir betrachten zunächst den ersten Term der Feldstärke:

$$\int d^3x\,\frac{3\left(\hat{x}\cdot\vec{d}\right)\hat{x}-\vec{d}}{|\vec{x}|^3} \;=\; \int\limits_0^\infty dr\,r^2\int d\Omega\frac{3\left(\hat{x}\cdot\vec{d}\right)\hat{x}-\vec{d}}{r^3}$$

Für $\vec{d}=d\vec{e}_3$ finden wir

$$\int d\Omega\left(3\left(\hat{x}\cdot\vec{d}\right)\hat{x}-\vec{d}\right) \;=\; 2\pi d\vec{e}_3\int\limits_0^\pi d\theta\,\sin\theta\left(3\cos^2\theta-1\right) = 0.$$

Der erste Term liefert also keinen Beitrag zum Integral und das korrekte Ergebnis wird durch den Term proportional zur Delta-Distribution erzeugt.

7 Magnetostatik

Die Grundgleichungen, die alle Phänomene mit ruhenden Permanentmagneten und mit stationären, d.h. zeitlich unveränderlichen, elektrischen Strömen beschreiben, lauten:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x}),\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\vec{x}) &= 0.\end{aligned}$$

Die Kontinuitätsgleichung reduziert sich auf

$$\vec{\nabla}\vec{j} = 0.$$

Setzt man

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$$

und verwendet man die Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{x}) = 0,$$

so erhält man

$$\Delta\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x}).$$

Diese Gleichung hat die gleiche Form wie die Poisson-Gleichung. Eine Lösung ist gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x'\,\frac{\vec{j}(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}$$

7.1 Magnetische Dipoldichte und magnetisches Moment

Entwickelt man nun wieder für $|\vec{x}\,'| \ll |\vec{x}|$ die Abstandsfunktion

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|} = \frac{1}{|\vec{x}|}+\frac{\vec{x}\cdot\vec{x}\,'}{|\vec{x}|^3}+\ldots,$$

so erhält man für die i-te Komponente des Vektorpotentials

$$A^i(\vec{x}) = \frac{1}{c\,|\vec{x}|}\underbrace{\int d^3x'\,j^i(\vec{x}\,')}_{=0}+\frac{1}{c\,|\vec{x}|^3}\sum_{k=1}^{3}x^k\int d^3x'\,x'^k\,j^i(\vec{x}\,')+\ldots$$

Das erste Integral verschwindet, dies sieht man wie folgt: Für die i-te Komponente des Stromes können wir auch schreiben

$$j^i(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}x^i,$$

da $\vec{\nabla}x^i$ einen Vektor ergibt, der eine Eins in der i-ten Komponente und Null in allen anderen hat. Somit

$$\int d^3x\, j^i(\vec{x}) \;=\; \int d^3x\, \vec{j}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}x^i = -\int d^3x\, \left(\vec{\nabla}\vec{j}(\vec{x})\right) x^i = 0,$$

wobei wir in der letzten Umformung ausgenutzt haben, daß der Strom erhalten ist.

Mit einer analogen Argumentation können wir zeigen, daß das zweite Integral antisymmetrisch in i und k ist:

$$\begin{aligned}\int d^3x\, x^i j^k(\vec{x}) &= \int d^3x\, x^i \vec{j}(\vec{x})\cdot\vec{\nabla}x^k = -\int d^3x\, \vec{\nabla}\left(x^i\vec{j}(\vec{x})\right)x^k = -\int d^3x\, \left(\vec{\nabla}x^i\right)\cdot\vec{j}(\vec{x})x^k \\ &= -\int d^3x\, j^i(\vec{x})x^k.\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3} x^k \int d^3x' x'^k j^i(\vec{x}') &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} x^k \int d^3x' \left[x'^k j^i(\vec{x}') - x'^i j^k(\vec{x}')\right] \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{ikl} x^k \int d^3x' \left(\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')\right)^l \\ &= -\frac{1}{2}\left(\vec{x}\times\int d^3x' \left(\vec{x}'\times\vec{j}(\vec{x}')\right)\right)^i\end{aligned}$$

Man definiert nun

$$\vec{m}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{2c}\vec{x}\times\vec{j}(\vec{x})$$

als **magnetische Dipoldichte**, und das Raumintegral über diese Dichte als **magnetisches Moment**:

$$\vec{\mu} \;=\; \int d^3x\; \vec{m} \;=\; \frac{1}{2c}\int d^3x\, \vec{x}\times\vec{j}(\vec{x})$$

Somit erhält man für das Vektorpotential

$$\vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{|\vec{x}|^3}\vec{\mu}\times\vec{x}.$$

7.2 Das Feld eines magnetischen Dipols

Für das Induktionsfeld eines magnetische Dipols gilt

$$\vec{B}_{\text{Dipol}} \;=\; \vec{\nabla}\times\vec{A}_{\text{Dipol}}$$

Im Außenraum haben wir

$$\vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{x}) \quad = \quad \frac{1}{|\vec{x}|^3}\vec{\mu}\times\vec{x}.$$

und somit

$$\begin{aligned}
\vec{B}^i_{\text{Dipol}} &= \sum_{k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\left(\nabla^k \frac{\mu^m x^n}{|x|^3}\right) \\
&= \sum_{k,l,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ikl}\varepsilon_{lmn}\left(\frac{\mu^m}{|x|^3}\delta^{kn} - 3\mu^m x^n x^k \frac{1}{|x|^5}\right) \\
&= 2\sum_{m=1}^{3}\frac{\mu^m}{|x|^3}\delta^{im} - 3\sum_{k,m,n=1}^{3}\left(\delta^{im}\delta^{kn} - \delta^{in}\delta^{km}\right)\mu^m x^n x^k \frac{1}{|x|^5} \\
&= 2\frac{\mu^i}{|x|^3} - 3\frac{\mu^i}{|x|^3} + 3\frac{x^i\,(\vec{\mu}\cdot\vec{x})}{|x|^5}
\end{aligned}$$

Daher:

$$\vec{B}_{\text{Dipol}} \quad = \quad \frac{3\,(\hat{x}\cdot\vec{\mu})\,\hat{x} - \vec{\mu}}{|\vec{x}|^3}.$$

Diese Formel gilt für $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ und ist somit auf den Außenraum beschränkt.

Unser Ziel ist es nun, eine Formel für das Feld $\vec{B}_{\text{Dipol}}$ für den gesamten Raum zu bestimmen. Zur Vereinfachung betrachten wir einen idealisierten punktförmigen magnetischen Dipol bei $\vec{x} = \vec{0}$, so daß der Außenraum aus $\mathbb{R}^3\backslash\{\vec{0}\}$ under Innenraum nur aus dem Punkt $\vec{x} = \vec{0}$ besteht. Dann gilt die obige Formel im gesamten Außenraum und unterscheidet sich nur durch einen Zusatzterm, der proportional zu $\delta(\vec{x})$ ist, von der gesuchten Formel im Gesamtraum. Wir bestimmen den Zusatzterm, indem wir wie beim elektrischen Dipol vorgehen. Für einen idealisierten punktförmigen magnetischen Dipol betrachten wir zunächst

$$\int\limits_{r<R} d^3x\,\vec{B}_{\text{Dipol}} \quad = \quad \int\limits_{r<R} d^3x\,\vec{\nabla}\times\vec{A}_{\text{Dipol}} = R^2\int\limits_{r=R} d\Omega\,\vec{n}\times\vec{A}_{\text{Dipol}},$$

wobei $\vec{n} = \vec{x}/R$ wieder der nach außen gerichtete Einheitsvektor ist. Hierbei haben wir eine Variante des Satzes von Gauß verwendet. Für die x-Komponente lautet die obige Umformung

$$\int\limits_{r<R} d^3x\,\left(\partial^y A^z_{\text{Dipol}} - \partial^z A^y_{\text{Dipol}}\right) \quad = \quad R^2\int\limits_{r=R} d\Omega\,\left(n^y A^z_{\text{Dipol}} - n^z A^y_{\text{Dipol}}\right).$$

Mit $\vec{F} = (0, A^z_{\text{Dipol}}, 0)$ folgt aus dem Satz von Gauß

$$\int\limits_{r<R} d^3x\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} \quad = \quad R^2\int\limits_{r=R} d\Omega\,\vec{n}\cdot\vec{F}$$

die Gleichung

$$\int\limits_{r<R} d^3x\, \partial^y A^z_{\text{Dipol}} \;=\; R^2 \int\limits_{r=R} d\Omega\, n^y A^z_{\text{Dipol}},$$

und mit $\vec{F} = (0, 0, -A^y_{\text{Dipol}})$ erhält man

$$\int\limits_{r<R} d^3x \left(-\partial^z A^y_{\text{Dipol}}\right) \;=\; R^2 \int\limits_{r=R} d\Omega \left(-n^z A^y_{\text{Dipol}}\right).$$

Der Beweis für die y- und z-Kompomente verläuft völlig analog. Wir haben also

$$\int\limits_{r<R} d^3x\, \vec{B}_{\text{Dipol}} \;=\; R^2 \int\limits_{r=R} d\Omega\, \vec{n} \times \frac{(\vec{\mu} \times \vec{x})}{|x|^3} = \int\limits_{r=R} d\Omega\, \vec{n} \times (\vec{\mu} \times \vec{n})$$

Wir drücken wieder $\vec{n}$ durch θ und φ aus:

$$\vec{n} \;=\; \sin\theta \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\theta \sin\varphi\, \vec{e}_2 + \cos\theta\, \vec{e}_3$$

und wählen das Koordinatensystem so, daß

$$\vec{\mu} \;=\; \mu\, \vec{e}_3.$$

Dann haben wir

$$\int\limits_{r<R} d^3x\, \vec{B}_{\text{Dipol}} \;=\; \int\limits_{r=R} d\Omega\, \vec{n} \times (\vec{\mu} \times \vec{n}) = 2\pi\mu\vec{e}_3 \int\limits_0^\pi d\theta\, \sin^3\theta = \frac{8\pi}{3}\vec{\mu},$$

und somit

$$\vec{B}_{\text{Dipol}} \;=\; \frac{3\,(\hat{x}\cdot\vec{\mu})\,\hat{x} - \vec{\mu}}{|\vec{x}|^3} + \frac{8\pi}{3}\vec{\mu}\delta(\vec{x}).$$

Alternative Herleitung des Zusatzterms: Der magnetische Dipol erzeugt eine Magnetisierungsdichte

$$\vec{m} \;=\; \vec{\mu}\delta(\vec{x}).$$

Wir werden später sehen, daß der Zusammenhang zwischen den $\vec{B}$- und $\vec{H}$-Feldern in diesem Fall durch

$$\vec{B} \;=\; \vec{H} + 4\pi\vec{m}$$

gegeben ist. Die Maxwellschen Gleichungen für statische magnetische Felder lauten:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla}\times\vec{H} &= 0, \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt, daß wir $\vec{H} = -\vec{\nabla}\psi$ mit einer skalaren Funktion ψ schreiben können. Setzen wir dies und $\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{m}$ in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$\Delta\psi = 4\pi\vec{\nabla}\cdot\vec{m}$$

Somit ist

$$\psi(\vec{x}) = -\int d^3y \frac{\vec{\nabla}_y \cdot \vec{m}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}) &= \int d^3y\, \vec{m}(\vec{y}) \frac{(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \\ &= \frac{\vec{\mu}\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \end{aligned}$$

Analog zum elektrischen Dipol findet man

$$\vec{H}_{\text{Dipol}} = \frac{3(\hat{x}\cdot\vec{\mu})\hat{x}-\vec{\mu}}{|\vec{x}|^3} - \frac{4\pi}{3}\vec{\mu}\delta(\vec{x})$$

und daher

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\text{Dipol}} &= \vec{H}_{\text{Dipol}} + 4\pi\vec{m} \\ &= \frac{3(\hat{x}\cdot\vec{\mu})\hat{x}-\vec{\mu}}{|\vec{x}|^3} + \frac{8\pi}{3}\vec{\mu}\delta(\vec{x}) \end{aligned}$$

7.3 Die Larmor-Präzession

Wir betrachten ein Magnetfeld, das von Ladungen hervorgerufen wird, die sich zu allen Zeiten in einem endlichen Raumbereich bewegen, wobei ihre Impulse auch immer endlich bleiben müssen. Wir interessieren uns für den zeitlichen Mittelwert des Magnetfeldes. Dieses mittlere Feld $\langle\vec{B}\rangle$ hängt dann nur noch von den Ortskoordinaten, aber nicht mehr von der Zeit ab und ist daher statisch.

$$\left\langle \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \lim_{T\to\infty} \frac{\vec{B}(T,\vec{x})-\vec{B}(0,\vec{x})}{T} = \vec{0}.$$

Eine räumlich begrenzte Stromverteilung stellt in erster Näherung einen magnetischen Dipol dar. Wir betrachten nun die Kräfte und Drehmomente, die auf diesen magnetischen Dipol in einem äußeren magnetischen Feld $\vec{B}_2$ wirken. Wir müssen fordern, daß das äußere magnetische Feld $\vec{B}_2$ schwach ist, so daß die zeitliche Änderung von $\vec{m}$ auf einer Zeitskala stattfindet, die lang ist im Vergleich zur Zeit T, die für die Zeitmittelung benötigt wird. Für die Stromdichte gilt

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = \sum_i q_i\vec{v}_i(\vec{x})\delta^3(\vec{x}-\vec{x}_i(t)).$$

Wir wollen weiter annehmen, daß sich das äußere magnetische Feld $\vec{B}_2$ über die Ausdehnung der räumlichen Stromverteilung nicht signifikant ändert, so daß wir $\vec{B}_2(\vec{x}) = \vec{B}_2(\vec{0})$ setzen können. Für das zeitliche Mittel der auf den magnetischen Dipol wirkenden Kraft gilt:

$$\left\langle \vec{F} \right\rangle = \left\langle \sum_i q_i \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}_2(\vec{0}) \right\rangle = \sum_i \frac{q_i}{c} \langle \vec{v}_i \rangle \times \vec{B}_2(\vec{0}) = 0.$$

Für das zeitgemittelte Drehmoment gilt:

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{N} \right\rangle &= \left\langle \sum_i \vec{x}_i \times \left(q_i \frac{\vec{v}_i}{c} \times \vec{B}_2(\vec{0}) \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{c} \left\langle \int d^3x\, \vec{x} \times \left(\vec{j}(t,\vec{x}) \times \vec{B}_2(\vec{0}) \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{c} \left\langle \int d^3x \left(\vec{x} \cdot \vec{B}_2(\vec{0}) \right) \vec{j}(t,\vec{x}) - \int d^3x \left(\vec{x} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) \right) \vec{B}_2(\vec{0}) \right\rangle
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int d^3x \left(\vec{x} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) \right) &= -\frac{1}{2} \int d^3x\, \vec{x}^2\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(t,\vec{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x\, \vec{x}^2\, \frac{\partial}{\partial t} \rho(t,\vec{x}) \\
&= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int d^3x\, \vec{x}^2\, \rho(t,\vec{x}) \right],
\end{aligned}$$

daher verschwindet der zweite Term bei der zeitlichen Mittelung. Somit

$$\left\langle \vec{N} \right\rangle = \frac{1}{c} \int d^3x \left(\vec{x} \cdot \vec{B}_2(\vec{0}) \right) \langle \vec{j} \rangle$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int d^3x\, \vec{m} \times \vec{B}_2(\vec{0}) &= \frac{1}{2c} \int d^3x \left(\vec{x} \times \langle \vec{j} \rangle \right) \times \vec{B}_2(\vec{0}) \\
&= \frac{1}{2c} \int d^3x \left(\vec{x} \cdot \vec{B}_2(\vec{0}) \right) \langle \vec{j} \rangle - \frac{1}{2c} \int d^3x \left(\langle \vec{j} \rangle \cdot \vec{B}_2(\vec{0}) \right) \vec{x} \\
&= \frac{1}{c} \int d^3x \left(\vec{x} \cdot \vec{B}_2(\vec{0}) \right) \langle \vec{j} \rangle = \left\langle \vec{N} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir für den zweiten Term in der zweiten Zeile die Relation

$$\int d^3x\, x^i j^k(\vec{x}) = -\int d^3x\, j^i(\vec{x}) x^k$$

verwendet. Somit erhalten wir

$$\left\langle \vec{N} \right\rangle = \vec{\mu} \times \vec{B}_2.$$

Haben alle Teilchen das gleiche Verhältnis q/m so gilt

$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= \frac{1}{2c}\int d^3x\,\vec{x}\times\langle\vec{j}\rangle = \sum_i \frac{q}{2c}\langle\vec{x}_i\times\vec{v}_i\rangle = \frac{q}{2mc}\sum_i\langle\vec{x}_i\times\vec{p}_i\rangle \\ &= \frac{q}{2mc}\langle\vec{L}\rangle\end{aligned}$$

und wir finden

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{L}\rangle = \frac{q}{2mc}\langle\vec{L}\rangle\times\vec{B}_2.$$

$\langle\vec{L}\rangle$ und $\vec{\mu}$ präzessieren daher mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega} = \frac{q}{2mc}\vec{B}_2$$

um die $\vec{B}_2$-Achse. Man bezeichnet

$$\omega = \frac{q}{2mc}B_2$$

als **Larmor-Frequenz**.

8 Die Maxwellschen Gleichungen in Materie

Bisher haben wir die Maxwellschen Gleichungen nur im Vakuum betrachtet. In Materie muß nun allerdings zwischen der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der dielektrische Verschiebung $\vec{D}$, sowie zwischen der magnetische Induktion $\vec{B}$ und der magnetische Feldstärke $\vec{H}$ unterschieden werden. Die Maxwellschen Gleichungen in Materie lauten:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0, \\
\vec{\nabla}\times\vec{E}(t,\vec{x}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(t,\vec{x}) &= 0, \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{D}(t,\vec{x}) &= 4\pi\rho(t,\vec{x}), \\
\vec{\nabla}\times\vec{H}(t,\vec{x}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(t,\vec{x}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(t,\vec{x}).
\end{aligned}$$

Zur Lösung dieser Gleichungen benötigt man Beziehungen zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$, sowie zwischen $\vec{B}$ und $\vec{H}$. Diese hängen im allgemeinen von den mikroskopischen Eigenschaften der Materie ab und sind prinzipiell berechenbar. Allerdings sind wir meist nur an makroskopischen Eigenschaften interessiert. Daher werden die Eigenschaften der Materie durch Größen beschrieben, die zwar im Prinzip aus einer mikroskopischen Beschreibung berechenbar sind, die aber nur gemittelte Eigenschaften der Materie widerspiegeln.

8.1 Zusammenhang der Verschiebung mit dem elektrischen Feld

Man unterscheidet zwischen elektrischen Leitern und polarisierbaren Medien.

In **idealisierten Leitern** gibt es frei bewegliche Ladungen, die sich bei Anlegen eines elektrischen Feldes so lange verschieben werden, bis wieder ein statischer Gleichgewichtszustand erreicht ist. Dies führt zu induzierten Ladungen, die sich auf den Oberflächen der leitenden Objekte befinden. Zur Definition der Flächenladungsdichte betrachten wir zuerst ein Volumen, daß durch eine Fläche und eine zur Fläche orthogonale (kleine) Ausdehnung der Länge h gegeben ist. Wir betrachten dann den Grenzwert $h \to 0$ und definieren die Flächenladungsdichte durch

$$\eta = \lim_{h\to 0} h\,\rho.$$

Hierbei ist ρ die (Volumen-) Ladungsdichte. Die Größe h hat die Dimension einer Länge und η hat die Dimension Ladung pro Fläche. Mit Ausnahme dieser Leiteroberfläche sind $\vec{D}$ und $\vec{E}$ gleich. An der Oberfläche gelten Stetigkeitsbedingungen, die wir später diskutieren werden.

In **polarisierbaren Medien** gibt es keine freien Ladungen, es ist aber sehr wohl möglich, daß ein angelegtes elektrisches Feld lokal, d.h. über mikroskopische Distanzen das Medium polarisiert.

Ist das Medium homogen und isotrop, so ist

$$\vec{D}(\vec{x}) = \varepsilon\vec{E}(\vec{x}).$$

Ist das Medium isotrop, aber nicht mehr homogen, so wird ε vom Ort abhängen:

$$\vec{D}(\vec{x}) \quad = \quad \varepsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}).$$

Ist das Medium weder homogen noch isotrop, so wird die Antwort des Mediums auf die angelegten Felder von der Richtung, in der diese zeigen abhängen. Die Funktion $\varepsilon(\vec{x})$ ist dann durch eine 3×3-Matrix zu ersetzen:

$$D^i(\vec{x}) \quad = \quad \varepsilon^{ij}(\vec{x})E^j(\vec{x}).$$

Das elektrische Feld ist die elementare, mikroskopische Feldgröße. Das elektrische Verschiebungsfeld kann in einem Medium vom elektrischen Feld abweichen, falls im Medium lokal verschiebbare Ladungen vorhanden sind. Man nimmt an, daß in Abwesenheit äußerer elektrischer Felder die Multipolmomente der molekularen Ladungsverteilung verschwinden. Diese Annahme ist gerechtfertig, falls man über hinreichend viele Moleküle mittelt. Legt man ein äußeres elektrisches Feld an, so wird diese Ladungsverteilung modifiziert, und die Multipolmomente sind im Allgemeinen ungleich Null. Da die Ladungen gebunden sind, bleibt das nullte Multipolmoment gleich Null. Der dominante Beitrag kommt daher von den molekularen Dipolen.

Wir betrachten ein einfaches schematische Modell: Ein Stück elektrisch ungeladener Materie möge derart in Zellen eingeteilt sein, so daß innerhalb jeder Zelle positive und negative Ladungen zwar verschoben werden können, die Zelle aber nicht verlassen können. Ohne äußeres Feld ist jede Zelle elektrisch neutral. Legt man ein äußeres Feld an, werden die Zellen polarisiert und man kann diese durch elektrische Dipole $\vec{d}_i$ modellieren. Die makroskopische Wirkung wird in Form einer **Polarisierbarkeit** beschrieben:

$$\vec{P}(\vec{x}) \quad = \quad \sum_i n_i(\vec{x}) \, \langle \vec{d}_i \rangle,$$

wobei $n_i(\vec{x})$ die mittlere Zahl von Dipolen pro Volumenelement ist, und $\langle \vec{d}_i \rangle$ der mittlere am Ort $\vec{x}_i$ wirksame Dipol ist.

Ein einzelner Dipol $\vec{d}$, der sich am Ort $\vec{x}'$ befindet, erzeugt am Punkt $\vec{x}$ ein Potential

$$\Phi_{\text{Dipol}}(\vec{x}) \quad = \quad \frac{\vec{d} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{d} \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Bezeichnet $\rho(\vec{x}')$ die Verteilung der freien Ladungen, so geben diese und die in der Materie induzierte Polarisation das Potential

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}) \quad &= \quad \int d^3x' \left[\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{x'} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] \\ &= \quad \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}') - \vec{\nabla}_{x'} \vec{P}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \end{aligned}$$

Das elektrische Feld ist das negative Gradientenfeld des Potentials $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ und für seine Divergenz erhält man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \quad = \quad 4\pi \left[\rho(\vec{x}) - \vec{\nabla}_x \vec{P}(\vec{x})\right].$$

Somit

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}(\vec{x}) + 4\pi\vec{P}(\vec{x})\right) \quad = \quad 4\pi\rho(\vec{x}).$$

Da andererseits auch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{x}) \quad = \quad 4\pi\rho(\vec{x}),$$

gilt, findet man den Zusammenhang

$$\vec{D} \quad = \quad \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

Im einfachsten Fall ist die Antwort des Mediums auf das angelegte elektrische Feld, d.h. die Polarisation $\vec{P}$ linear in $\vec{E}$ und in jeder Richtung dieselbe (Isotropie), in einer Formel also

$$\vec{P}(\vec{x}) \quad = \quad \chi_e(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}),$$

wo $\chi_e(\vec{x})$ die **elektrische Suszeptibilität** des Mediums ist. In diesem Fall ist also

$$\vec{D}(\vec{x}) \quad = \quad \varepsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}),$$

wobei

$$\varepsilon(\vec{x}) \quad = \quad 1 + 4\pi\chi_e(\vec{x}).$$

Ist das Medium außerdem noch homogen, dann ist ε über das ganze Medium eine Konstante, die **Dielektrizitätskonstante** genannt wird. Für die inhomogene Maxwellsche Gleichung ergibt sich in diesem Fall

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}) \quad = \quad \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho(\vec{x}).$$

Die Richtung eines elektrischen Dipols weist von der negativen zur positiven Ladung. Daher hat die Polarisation $\vec{P}$ die gleiche Richtung wie das äußere Feld $\vec{E}$. Somit ist

$$\chi_e > 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon > 1.$$

Daher wird das angelegte Feld durch die von ihm induzierten Dipolfelder abgeschwächt.

8.2 Zusammenhang zwischen Induktions- und magnetischen Feld

In Analogie zum elektrischen Fall diskutieren wir hier den Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion und magnetischer Feldstärke.

Ein magnetischer Punktdipol erzeugt das Vektorpotential

$$\vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{x}) = \frac{\vec{\mu} \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Wir beschreiben die magnetische Polarsierbarkeit eines Stücks Materie durch eine **Magnetisierungsdichte**

$$\vec{m}(\vec{x}) = \sum_i n_i(\vec{x}) \, \langle \vec{\mu}_i \rangle,$$

wobei $\langle \vec{\mu}_i \rangle$ das mittlere magnetische Dipolmoment am Ort $\vec{x}_i$ ist, und $n_i(\vec{x})$ die mittlere Anzahl solcher Dipole pro Volumenelement. Falls außerdem noch eine freie Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ vorhanden ist, so hat man für das Vektorpotential

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \vec{A}_{\text{Strom}}(\vec{x}) + \vec{A}_{\text{Dipol}}(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x' \left[\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + c \frac{\vec{m}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] \end{aligned}$$

Wir verwenden wieder

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = \vec{\nabla}_{x'} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)$$

und erhalten nach einer partiellen Integration

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}') + c \left(\vec{\nabla}_{x'} \times \vec{m}(\vec{x}') \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Berechnet man nun die Rotation von $\vec{B}$, so erhält man

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}) \right) = -\Delta \vec{A}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}) + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{m}(\vec{x}),$$

und damit

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{B}(\vec{x}) - 4\pi \vec{m}(\vec{x}) \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x}).$$

Da andererseits für statische Magnetfelder

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{x})$$

gilt, ergibt sich der Zusammenhang

$$\vec{H}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}) - 4\pi\vec{m}(\vec{x}), \qquad \vec{B}(\vec{x}) = \vec{H}(\vec{x}) + 4\pi\vec{m}(\vec{x}).$$

Ist die Antwort des Mediums linear und isotrop, so schreibt man

$$\vec{m}(\vec{x}) \;=\; \chi_m(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}).$$

Man nennt $\chi_m(\vec{x})$ die **magnetische Suszeptibilität** Man erhält somit

$$\vec{B}(\vec{x}) \;=\; \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}),$$

wobei

$$\mu(\vec{x}) \;=\; 1 + 4\pi\chi_m(\vec{x})$$

die **magnetische Permeabilität** genannt wird. Die Linearität ist gegeben für para- und diamagnetische Medien, nicht jedoch für ferromagnetische Medien.

Diamagnetische Substanzen bestehen aus Atomen, deren Gesamtdrehimpuls gleich Null ist, die also kein eigenes magnetisches Moment besitzen. Das angelegte Magnetfeld induziert hier magnetische Momente, die dem angelegten Feld entgegen gerichtet sind. Dies bedeutet für die makroskopischen Parameter, daß $\chi_m < 0$ und $\mu < 1$ ist.

Paramagnetische Substanzen bestehen aus Atomen, die einen nicht-verschwindenden Gesamtdrehimpuls und ein eigenes magnetisches Moment besitzen. Dieses magnetische Moment, das von ungepaarten Elektronen aus der Atomhülle stammt, richtet sich parallel zum angelegten Feld aus, hier ist also $\chi_m > 0$ und somit $\mu > 1$. In beiden Fällen, dem Diamagnetismus und dem Paramagnetismus, ist χ_m sehr klein und daher μ nahe bei 1.

In **ferromagnetischen Substanzen** ist die Antwort des Mediums auf das angelegte Feld nicht mehr linear und die Funktion

$$\vec{B} \;=\; \vec{F}\left(\vec{H}\right)$$

ist sogar mehrwertig, d.h. der Wert der Induktion $\vec{B}$ bei vorgegebenen Wert von $\vec{H}$ hängt davon ab, wie das Feld $\vec{H}$ angefahren wurde. Es tritt das Phänomen der Hysterese auf.

8.3 Ohmsches Gesetz

Im Inneren von Leitern können sich die Ladungsträger (meist die Elektronen) frei bewegen. Bei der thermischen Bewegung führen sie unregelmässige Streuprozesse mit den Gitteratomen (Phononen) aus. Im Mittel wird sich der dadurch bedingte Strom allerdings herausheben. Legt man nun ein elektrisches Feld an, so findet zusätzlich zu dieser thermischen Bewegung eine

Driftbewegung in Richtung des angelegten Feldes statt. Wir können dies durch eine Bewegung im äußeren Feld mit Reibung beschreiben. Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}+m\gamma\frac{d}{dt}\vec{x} \quad = \quad q\vec{E}.$$

Für einen stationären Strom gilt

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{x} \quad = \quad \vec{0},$$

und wir erhalten mit der Teilchendichte n folgenden Ausdruck für den gemittelten Leitungsstrom:

$$\vec{j} \quad = \quad nq\vec{v} = \frac{nq^2}{m\gamma}\vec{E}.$$

Die Größe

$$\sigma \quad = \quad \frac{nq^2}{m\gamma}$$

bezeichnet man als **Leitfähigkeit**. Man erhält somit das **Ohmsche Gesetz**

$$\vec{j} \quad = \quad \sigma\vec{E}.$$

Die Äquivalenz mit der bekannteren Formulierung $R = U/I$ sieht man wie folgt: Für ein endliches Leiterstück mit der Querschnittfläche A und der Länge L, an das eine Spannung U angelegt wird, erhalten wir also einen Strom I, der dem Ohmschen Gesetz genügt:

$$I \quad = \quad A\left|\vec{j}\right| = A\sigma\left|\vec{E}\right| = A\sigma\frac{U}{L} = \frac{U}{R}.$$

Dabei ist der Widerstand des Leiterstücks durch

$$R \quad = \quad \frac{L}{A\sigma}$$

gegeben.

Bemerkung: Im Falle eines Supraleiters haben wir keine Reibung ($\gamma = 0$). In diesem Fall ist das Feld proportional zur zeitlichen Änderung des Suprastromes $\vec{j}_{\text{supra}}$:

$$\frac{d}{dt}\vec{j}_{\text{supra}} \quad = \quad \frac{nq^2}{m}\vec{E}.$$

Diese Gleichung bildet zusammen mit der Gleichung

$$\vec{\nabla}\times\vec{j}_{\text{supra}} \quad = \quad -\frac{nq^2}{mc}\vec{B}$$

den Satz der London-Gleichungen, die eine phänomenologische Beschreibung der Supraleitung darstellen.

8.4 Stetigkeitsbedingungen

In inhomogenen Medien können die Materialkonstanten ε, μ und σ vom Orte abhängen. In vielen Fällen hat man es allerdings mit wenigstens stückweisen homogenen Medien zu tun. Dann treten Änderungen der Materialkonstanten nur an Grenzflächen auf. Diese Änderungen kann man mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen bestimmen.

Normalkomponente von $\vec{B}$: Wir legen in die Grenzfläche eine Dose mit infinitesimaler Höhe h, deren Boden und Deckel parallel zur Grenzfläche ist. Dann folgt aus der Divergenzfreiheit des $\vec{B}$-Feldes:

$$0 = \int d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \oint d\sigma \vec{B} \cdot \hat{n} \overset{h \to 0}{=} A\hat{n} \cdot \left(\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)} \right).$$

Die Normalkomponente von $\vec{B}$ ist stetig:

$$B_\perp^{(2)} = B_\perp^{(1)}.$$

Normalkomponente von $\vec{D}$: Aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$ folgt mittels derselben Konstruktion

$$4\pi Q = \int d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \oint d\sigma \vec{D} \cdot \hat{n} \overset{h \to 0}{=} A\hat{n} \cdot \left(\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)} \right).$$

Die Normalkomponente von $\vec{D}$ ist an der Oberfläche nicht stetig und macht einen Sprung, der proportional zur Oberflächenladungsdichte η ist:

$$D_\perp^{(2)} - D_\perp^{(1)} = 4\pi \frac{Q}{A} = 4\pi\eta.$$

Tangentialkomponente von $\vec{H}$: Die Maxwellsche Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

reduziert sich im statischen Fall auf

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}.$$

Wir betrachten nun ein rechteckig geschlossenes Linienintegral der Länge l längs der Oberfläche und der infinitesimalen Höhe h senkrecht zur Oberfläche. Dieses Linienintegral umschließt eine Fläche, deren Normalenvektor in der Grenzfläche liegt. Da dieser Normalenvektor in der Grenzfläche liegt, bezeichnen wir in mit $\hat{t}$. Aus dem Satz von Stokes erhalten wir

$$\oint d\vec{s} \cdot \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \int d\sigma \vec{j} \cdot \hat{t}.$$

Werten wir diese Integrale aus, so erhalten wir

$$(\hat{t} \times \hat{n}) \cdot \left(\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)} \right) l = \frac{4\pi}{c} \hat{t} \cdot \vec{j} l h,$$

wobei der Einheitsvektor $\hat{t}$ zusammen mit $d\vec{s}$ und $\hat{n}$ ein orthogonales Dreibein bilden. Da zum einen

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} \;=\; \left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}$$

ist und zum anderen $\hat{t}$ eine beliebige Richtung tangential zur Oberfläche ist, gilt:

$$\hat{n}\times\left(\vec{H}^{(2)}-\vec{H}^{(1)}\right) \;=\; \frac{4\pi}{c}\vec{j}h \overset{h\to 0}{=} \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{surface}}.$$

Hierbei haben wir die Flächenstromdichte durch

$$\vec{j}_{\text{surface}} \;=\; \lim_{h\to 0} h\vec{j}.$$

definiert. $\hat{n}\times H_{||}$ macht daher einen Sprung von der Größe und der Richtung der Flächenstromdichte j_{surface}.

Tangentialkomponente von $\vec{E}$: Analog leitet man aus

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \;=\; 0$$

im statischen Fall ab, daß die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ stetig ist:

$$E_{||}^{(2)} \;=\; E_{||}^{(1)}.$$

Zusammenfassung der Stetigkeitsbedingungen:

$$\hat{n}\cdot\left(\vec{D}^{(2)}-\vec{D}^{(1)}\right)=4\pi\eta, \qquad \hat{n}\times\left(\vec{E}^{(2)}-\vec{E}^{(1)}\right)=0,$$
$$\hat{n}\cdot\left(\vec{B}^{(2)}-\vec{B}^{(1)}\right)=0, \qquad \hat{n}\times\left(\vec{H}^{(2)}-\vec{H}^{(1)}\right)=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{surface}}.$$

8.5 Der Energie-Impuls-Tensor in Materie

Der symmetrische Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes im Vakuum lautet:

$$T^{\mu\nu} \;=\; \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\tau}(x)F_{\tau}{}^{\nu}(x)+\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right].$$

Für die expliziten Einträge erhält man

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)=u(t,\vec{x}),\\
T^{0i} &= \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)^i=cP^i(t,\vec{x}),\\
T^{i0} &= \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)^i=\frac{1}{c}S^i(t,\vec{x}),\\
T^{ij} &= -\frac{1}{4\pi}\left[\vec{E}^i\vec{E}^j+\vec{B}^i\vec{B}^j-\frac{1}{2}\delta^{ij}\left(\vec{E}^2+\vec{B}^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Für dessen Divergenz finden wir nun

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} F^{\nu\mu} j_\mu.$$

Ausgeschrieben für die zeitliche Komponente erhält man

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla}\vec{S} + \vec{E}\cdot\vec{j} = 0.$$

Wir betrachten nun den Energie-Impuls-Tensor in einem linearen, homogenen und isotropen Medium. Hier gilt

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu\vec{H}.$$

Mman findet für den Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[\hat{F}^{\mu\tau}(x) F_\tau{}^\nu(x) + \frac{1}{4} g^{\mu\nu}\hat{F}_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\right],$$

wobei

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -D^x & -D^y & -D^z \\ D^x & 0 & -H^z & H^y \\ D^y & H^z & 0 & -H^x \\ D^z & -H^y & H^x & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
u(t,\vec{x}) &= \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right) = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\vec{E}^2 + \mu\vec{H}^2\right) \\
\vec{P}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{4\pi c}\vec{D}\times\vec{B} = \frac{1}{4\pi c}\varepsilon\mu\vec{E}\times\vec{H}, \\
\vec{S}(t,\vec{x}) &= \frac{c}{4\pi}\vec{E}\times\vec{H}, \\
T^{ij} &= -\frac{1}{4\pi}\left[\varepsilon\left(\vec{E}^i\vec{E}^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}\vec{E}^2\right) + \mu\left(\vec{H}^i\vec{H}^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}\vec{H}^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Diese Größen erfüllen wie im Fall des Vakuums die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \vec{\nabla}\vec{S} + \vec{E}\cdot\vec{j} = 0.$$

Bemerkung: Neben Energie- und Impulsdichte ist auch noch die Drehimpulsdichte interessant. Man definiert

$$\vec{l} = \frac{1}{4\pi c}\vec{x}\times\left(\vec{D}\times\vec{B}\right) = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\vec{x}\times\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$$

als Drehimpulsdichte des elektromagnetischen Feldes.

8.6 Zusammenfassung der Elektrodynamik in Materie

Zusammenhang zwischen Verschiebung und elektrischen Feld:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}.$$

Einfachster Fall: Lineare Antwort eines isotropen Mediums auf das angelegte elektrische Feld:

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{x}) &= \chi_e(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}), \\ \vec{D}(\vec{x}) &= \varepsilon(\vec{x})\vec{E}(\vec{x}), \\ \varepsilon(\vec{x}) &= 1 + 4\pi\chi_e(\vec{x}). \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion und magnetischer Feldstärke:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{H}(\vec{x}) + 4\pi\vec{m}(\vec{x}).$$

Einfachster Fall: Lineare Antwort eines isotropen Mediums:

$$\begin{aligned} \vec{m}(\vec{x}) &= \chi_m(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}), \\ \vec{B}(\vec{x}) &= \mu(\vec{x})\vec{H}(\vec{x}), \\ \mu(\vec{x}) &= 1 + 4\pi\chi_m(\vec{x}) \end{aligned}$$

Ohmsches Gesetz:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}.$$

Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen:

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \left(\vec{D}^{(2)} - \vec{D}^{(1)}\right) = 4\pi\eta, &\qquad \hat{n} \times \left(\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}\right) = 0, \\ \hat{n} \cdot \left(\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}\right) = 0, &\qquad \hat{n} \times \left(\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\text{surface}}. \end{aligned}$$

9 Die Strahlung des elektromagnetischen Feldes

Im folgenden wenden wir uns, soweit nicht explizit anders angegeben, wieder Lösungen der Maxwellschen Gleichungen im Vakuum zu. Durch die Einführung des Viererpotentials reduzieren sich die Maxwellschen Gleichungen auf

$$\Box A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\nu.$$

Wählt man die Lorenz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

so erhält man

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu.$$

Zur Erinnerung:

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta.$$

Wir benötigen zum einen die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung, als auch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Wir beginnen mit der Konstruktion einer speziellen Lösung.

9.1 Die Helmholtz-Gleichung

Wir betrachten nun die Gleichung

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(t,\vec{x}) = -4\pi F(t,\vec{x}).$$

Eine Methode, diese Gleichung zu lösen, besteht darin, zunächst eine Fouriertransformation für die Zeitkomponente durchzuführen. Dies führt auf die Helmholtz-Gleichung, die wir zuerst lösen. Danach führen wir die Fourier-Rücktransformation aus. Wir setzen

$$\psi(t,\vec{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\tilde{\psi}(\omega,\vec{x}),$$

$$F(t,\vec{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\tilde{F}(\omega,\vec{x}),$$

Für die Rücktransforamtion gilt

$$\tilde{\psi}(\omega,\vec{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\psi(t,\vec{x}),$$

$$\tilde{F}(\omega,\vec{x}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}F(t,\vec{x}),$$

Einsetzen liefert

$$\left(\Delta_x + k^2\right) \tilde{\psi}(\omega,\vec{x}) \;=\; -4\pi \tilde{F}(\omega,\vec{x}), \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Diese Gleichung nennt man die (inhomogene) **Helmholtz-Gleichung**.

Zur Lösung dieser Differentialgleichung betrachten wir zunächst die zugehörige Greensche Funktion. Diese Greensche-Funktion ist eine Lösung der Gleichung

$$\left(\Delta_x + k^2\right) G_k(\vec{x},\vec{x}') \;=\; \delta^3(\vec{x}-\vec{x}').$$

Bemerkung: Bis auf das Vorzeichen von k^2 ist diese Gleichung identisch mit der Differentialgleichung für die Greensche Funktion des Yukawa-Potential. Die Gleichung für das **Yukawa-Potential** lautet

$$\left(\Delta_x - \mu^2\right) G_\mu(\vec{x},\vec{x}') \;=\; \delta^3(\vec{x}-\vec{x}').$$

Es ist technisch etwas einfacher, zunächst die Greensche Funktion für das Yukawa-Potential zu bestimmen, und dann $\mu = \pm i|k|$ zu setzen. Im Fall $\mu^2 = 0$ kennen wir die Lösung bereits, dies ist nichts anderes als die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung

$$G_0(\vec{x},\vec{x}') \;=\; -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

Wir betrachten nun $\mu^2 \neq 0$. Wir stellen zunächst fest, daß $G_\mu(\vec{x},\vec{x}')$ nur von der Differenz $\vec{x}-\vec{x}'$ abhängt:

$$G_\mu(\vec{x},\vec{x}') \;=\; G_\mu(\vec{x}-\vec{x}').$$

Dies sieht man wie folgt: Für beliebiges $\vec{y}$ und $\vec{z} = \vec{x}-\vec{y}$ gilt zunächst:

$$\left(\Delta_x - \mu^2\right) G_\mu(\vec{x}-\vec{y},\vec{x}'-\vec{y}) \;=\; \left(\Delta_z - \mu^2\right) G_\mu(\vec{z},\vec{x}'-\vec{y}) = \delta^3(\vec{z}-\vec{x}'+\vec{y}) = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}').$$

Somit hat man für $\vec{y} = \vec{x}'$:

$$\left(\Delta_x - \mu^2\right) G_\mu(\vec{x}-\vec{x}',0) \;=\; \delta^3(\vec{x}-\vec{x}').$$

Zur Bestimmung der Greenschen Funktion der Helmholtz-Gleichung verwenden wir wieder die Technik der Fourier-Transformation. Wir führen eine Fourier-Transformation für den Ortsraum durch

$$G_\mu(\vec{x},\vec{x}') \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')}\tilde{G}_\mu(\vec{p})$$

Für die Delta-Funktion haben wir

$$\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')}.$$

Damit erhält man

$$\left(\Delta_x - \mu^2\right) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \tilde{G}_\mu(\vec{p}) \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \left(-p^2 - \mu^2\right) \tilde{G}_\mu(\vec{p}) \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')}.$$

Aus der Gleichheit der Integranden folgt

$$\tilde{G}_\mu(\vec{p}) \;=\; -\frac{1}{p^2+\mu^2}.$$

Somit ist

$$G_\mu(\vec{x},\vec{x}') \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')} \tilde{G}_\mu(\vec{p}) \;=\; -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p\, \frac{e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{x}')}}{p^2+\mu^2}.$$

Sei nun $\vec{x}-\vec{x}' = (0,0,r)$.

$$\begin{aligned}
G_\mu(\vec{x},\vec{x}') &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin\theta\, e^{ipr\cos\theta} \frac{p^2}{p^2+\mu^2}, \qquad u = -\cos\theta \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 du\, e^{-ipru} \frac{p^2}{p^2+\mu^2} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \frac{1}{(-ipr)} \left(e^{-ipr} - e^{ipr}\right) \frac{p^2}{p^2+\mu^2} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2 ir} \int_0^\infty dp \left(\frac{pe^{ipr}}{p^2+\mu^2} - \frac{pe^{-ipr}}{p^2+\mu^2} \right) = -\frac{1}{(2\pi)^2 ir} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{p^2+\mu^2}.
\end{aligned}$$

Wir nehmen nun $\mu > 0$ an. Der Integrationsweg kann für $r > 0$ durch einen Halbkreis im Unendlichen des I. und II. Quadranten geschlossen werden. Dieses Stück liefert keinen Beitrag. Somit ergibt sich mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{p^2+\mu^2} \;=\; 2\pi i \,\mathrm{res} \left(\frac{pe^{ipr}}{p^2+\mu^2} \right) \Bigg|_{p=i\mu} = \pi i e^{-r\mu}$$

Und somit für $r > 0$

$$G_\mu(\vec{x},\vec{x}') \;=\; -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\mu|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

Für $r < 0$ schliessen wir die Kontour nach unten:

$$\int_{-\infty}^\infty dp \frac{pe^{ipr}}{p^2+\mu^2} \;=\; -2\pi i \,\mathrm{res} \left(\frac{pe^{ipr}}{p^2+\mu^2} \right) \Bigg|_{p=-i\mu} = -\pi i e^{r\mu}$$

und somit finden wir für $r < 0$ ebenfalls

$$G_\mu(\vec{x},\vec{x}') \;=\; -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\mu|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

Wir kehren nun zur Helmholtz-Gleichung zurück und substituieren $\mu = \pm ik$. Somit erhalten wir die Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung:

$$G_k^{\pm}(\vec{x},\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

Wir werden später sehen, daß die Wahl der Vorzeichen im Exponenten durch die Randbedingungen bestimmt wird. Technisch betrachtet haben wir nun Pole auf der reellen Achse bei $p = \pm k$. Die Wahl der Vorzeichen hängt davon ab, wie diese Pole umgangen werden.

9.2 Die Greensche Funktion der Wellengleichung

Wir bestimmen nun die Greensche Funktion der Wellengleichung

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(t,\vec{x},t',\vec{x}') = \frac{1}{c}\delta(t-t')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}').$$

Führt man die Fouriertransformation in t durch

$$G(t,\vec{x},t',\vec{x}') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\tilde{G}(\omega,\vec{x},t',\vec{x}'),$$

$$\frac{1}{c}\delta(t-t')\delta^3(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{c}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega(t-t')},$$

so ergibt sich mit $k = \omega/c$

$$\left(\Delta_x + k^2\right)\tilde{G}(\omega,\vec{x},t',\vec{x}') = \frac{1}{c}\delta^3(\vec{x}-\vec{x}')e^{i\omega t'}.$$

In den Variablen $\vec{x}$ ist dies bis auf einen von $\vec{x}$ unabhängigen Vorfaktor $e^{i\omega t'}/c$ die Helmholtz-Gleichung. Wir erhalten daher die Lösung

$$\tilde{G}(\omega,\vec{x},t',\vec{x}') = \frac{1}{c}e^{i\omega t'}G_k^{\pm}(\vec{x},\vec{x}').$$

Führt man dann die Rücktransformation der Fouriertransformation durch, so erhält man

$$\begin{aligned}
G(t,\vec{x},t',\vec{x}') &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\tilde{G}(\omega,\vec{x},t',\vec{x}') \\
&= \frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, G_k^{\pm}(\vec{x},\vec{x}')e^{-i\omega(t-t')} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\exp\left(-i\omega(t-t') \pm ik\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\,\exp\left(-i\omega(t-t') \pm i\frac{\omega}{c}\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\right).
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp\left(-i\omega\left[(t-t') \mp \frac{1}{c}\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\right]\right) = \delta\left((t-t') \mp \frac{1}{c}\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\right)$$
$$= \delta\left(t - \left[t' \pm \frac{1}{c}\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\right]\right).$$

Somit

$$G^{\pm}(t,\vec{x},t',\vec{x}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{1}{\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|}\delta\left(t - \left[t' \pm \frac{1}{c}\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\right]\right).$$

Mit Hilfe dieser Greenschen Funktion ergibt sich die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\left(\Delta_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(t,\vec{x}) = -4\pi F(t,\vec{x})$$

zu

$$\psi^{\pm}(t,\vec{x}) = -4\pi \int c\, dt' \int d^3x'\, G^{\pm}(t,\vec{x},t',\vec{x}')F(t',\vec{x}').$$

Man bezeichnet $G^{+}(t,\vec{x},t',\vec{x}')$ als **retardierte Greensche Funktion** und $G^{-}(t,\vec{x},t',\vec{x}')$ als **avancierte Greensche Funktion**.
Wir betrachten zunächst die retardierte Greensche Funktion $G^{+}(t,\vec{x},t',\vec{x}')$. Hier erzwingt die δ-Distribution

$$t = t' + \frac{1}{c}\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|,$$

d.h. $t > t'$. Das Signal, das von der Quelle am Ort $\vec{x}'$ zur Zeit t' ausgeht, läuft mit Lichtgeschwindigkeit zum Beobachter am Ort $\vec{x}$ und erreicht diesen zur Zeit

$$t = t' + \text{Laufzeit des Signals von } \vec{x}' \text{ nach } \vec{x}.$$

Beschreibt $F(t',\vec{x}')$ eine in Raum und Zeit lokalisierte Quelle, so bedeutet dies im Besonderen, daß für alle $t' < t_{\text{start}}$ und für alle $t > t_{\text{end}}$ die Quelle keinen Beitrag liefert. Wenn zur Zeit $t = -\infty$ bereits ein gewisser Anfangszustand $\psi_{\text{in}}(-\infty,\vec{x})$ vorlag (in für "incoming"), dann lautet die vollständige Lösung

$$\psi(t,\vec{x}) = \psi_{\text{in}}(t,\vec{x}) - 4\pi \int c\, dt' \int d^3x'\, G^{+}(t,\vec{x},t',\vec{x}')F(t',\vec{x}').$$

Somit kann zwar schon lange bevor die Quelle funkt ein einlaufendes Signal vorhanden sein (welches die Randbedinung bei $t = -\infty$ erfüllt), die Quelle liefert aber zusätzliche Beiträge nur dann, wenn t gleich $t' + |\vec{x}-\vec{x}'|/c$ ist. Sie trägt zum Gesamtfeld ψ nur auf retardierte Weise, d.h. kausal bei.

Die avancierte Greensche Funktion $G^-(t,\vec{x},t',\vec{x}')$: Hier erzwingt die δ-Distribution

$$t = t' - \frac{1}{c}\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|,$$

d.h. die Zeit t, zur der der Beobachter etwas wahrnimmt ist früher als die Zeit t' zu der die Quelle funkt. Daher ist t nicht kausal mit t' verknüpft. Die avancierte Greensche Funktion wird verwendet, falls als Randbedingung nicht das einlaufende Feld ψ_{in} sondern die auslaufende Lösung ψ_{out} gegeben ist, die sich zur Zeit $t=\infty$ einstellt. In diesem Fall lautet die vollständige Lösung

$$\psi(t,\vec{x}) = \psi_{\text{out}}(t,\vec{x}) - 4\pi \int c\,dt' \int d^3x'\; G^-(t,\vec{x},t',\vec{x}')F(t',\vec{x}').$$

9.3 Das Lienard-Wiechert Potential

Ein elektrisch geladenes Teilchen, das im räumlichen Bezugssystem K die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ durchläuft, erzeugt außer der punktförmigen Ladungsdichte $\rho(t,\vec{x})$ eine Stromdichte $\vec{j}(t,\vec{x})$, die zu seiner Geschwindigkeit proportional ist:

$$\begin{aligned}\rho(t,\vec{x}) &= q\delta^3(\vec{x}-\vec{r}(t)),\\ \vec{j}(t,\vec{x}) &= q\vec{v}(t)\delta^3(\vec{x}-\vec{r}(t)).\end{aligned}$$

Somit ist

$$j^\mu(x) = \left(c\rho,\vec{j}\right) = qc\int ds\, u^\mu(s)\,\delta^4\left(x-r(s)\right)$$

Diese Stromdichte agiert als Quellterm für das elektromagnetische Feld:

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$$

in Lorenz-Eichung. Eine Lösung für das Viererpotential A^μ ist gegeben durch

$$A^\mu(x) = -\frac{4\pi}{c}\int d^4x' G^+(x,x')\,j^\mu(x').$$

Die retardierte Greensche Funktion lautet

$$\begin{aligned}G^+(x,x') &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta\left(t-\left[t'+\frac{1}{c}\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\right]\right)\\ &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta\left(c\left(t-t'\right)-\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|\right)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\Theta\left(x^0-x'^0\right)\delta\left(\left(x-x'\right)^2\right).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir

$$\delta\left(f(u)\right) = \sum_i \frac{1}{|f'(u_i)|}\delta\left(u-u_i\right)$$

verwendet, wobei die u_i die einfachen Nullstellen von $f(u)$ sind. Die Theta-Funktion stellt sicher, daß nur die Nullstelle, die der retardierten Lösung entspricht, beiträgt. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= -\frac{4\pi}{c}\int d^4x' G^+(x,x')\, j^\mu(x') \\ &= 2q\int ds \int d^4x' \Theta\left(x^0 - x'^0\right)\delta\left((x-x')^2\right) u^\mu(s)\,\delta^4\left(x' - r(s)\right) \\ &= 2q\int ds\, \Theta\left(x^0 - r^0(s)\right)\delta\left((x-r(s))^2\right) u^\mu(s). \end{aligned}$$

Sei nun s_0 der Wert, so daß

$$(x - r(s_0))^2 = 0 \quad \text{und} \quad x^0 - r^0(s_0) > 0.$$

In anderen Worten: s_0 ist der Wert des Bahnparameters, so daß der Punkt x^μ auf dem Vorwärtslichtkegel von $r^\mu(s_0)$ liegt. Nochmal etwas anders formuliert: s_0 ist der Wert des Bahnparameters, bei dem die Bahnkurve den Rückwärtslichtkegel von x^μ schneidet. Nun ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(x - r(s))^2\bigg|_{s=s_0} &= -2\,(x - r(s))_\nu \frac{d}{ds} r(s)^\nu\bigg|_{s=s_0} \\ &= -2\,(x - r(s_0))_\nu\, u^\nu(s_0) \end{aligned}$$

und daher

$$A^\mu(x) = q\frac{u^\mu(s_0)}{(x - r(s_0))\cdot u(s_0)}.$$

Diesen Ausdruck nennt man das **Lienard-Wiechert Potential**. Verwendet man als Parametrisierung der Bahnkurve $r(t)$ anstelle von $r(s)$, so ergibt sich

$$A^\mu(x) = q\frac{u^\mu(t_0)}{(x - r(t_0))\cdot u(t_0)}.$$

Bemerkung: $u^\mu(t_0)$ und $r^\mu(t_0)$ sind bei t_0 auszuwerten, so daß x^μ auf dem Vorwärtslichtkegel von $r^\mu(t_0)$ liegt.

9.4 Abstrahlung einer beschleunigten Ladung

Eine Anwendung des Lienard-Wiechert Potentials ist die Beschreibung der elektromagnetischen Abstrahlung einer beschleunigten Ladung. Beispiele hierfür sind:

- Punktladung, die längs einer Achse oszilliert;

- Ladungen auf einer Kreisbahn bzw. äquivalent hierzu Synchrotronstrahlung.

Wir betrachten zunächst in diesem Abschnitt eine beliebige Bewegung eines geladenen Teilchens und bestimmen die hieraus resultierenden elektrischen und magnetischen Felder, sowie die abgestrahlte Leistung. In den darauffolgenden Abschnitten untersuchen wir dann eingehend den Spezialfall einer periodisch oszillierenden Ladung.

Wir betrachten ein geladenes Teilchen, dessen Bahnkurve durch $r^\mu(t')$ gegeben ist. Den Bahnparameter bezeichnet wir mit t'. Wir bestimmen zuerst die elektrischen und magnetischen Felder aus dem Potential. Mit

$$u^\mu = \gamma\left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right)$$

ergibt sich zunächst mit $r^0(t') = ct'$

$$u(t') \cdot \big(x - r(t')\big) = u^0(t')\big(x^0 - r^0(t')\big) - \vec{u}(t') \cdot (\vec{x} - \vec{r}(t')) = \gamma(t')\left[c(t-t') - \frac{\vec{v}(t')}{c} \cdot \big(\vec{x} - \vec{r}(t')\big)\right].$$

Wegen $(x - r(t'))^2 = 0$ und $x^0 > r^0(t')$ ist

$$x^0 - r^0(t') = c(t-t') = \left|\vec{x} - \vec{r}(t')\right| = R,$$

wobei R den räumlichen Abstand zwischen dem Aufpunkt x und dem Punkt $r(t')$ auf der Bahnkurve bezeichnet. Weiter definieren wir den Richtungsvektor

$$\hat{n} = \frac{\vec{x} - \vec{r}(t')}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|}$$

Damit erhalten wir dann

$$u \cdot (x - r) = \gamma R\left(1 - \frac{1}{c}\vec{v} \cdot \hat{n}\right)$$

Aus dem Lienard-Wiechert Potential

$$A^\mu = \frac{q u^\mu}{u \cdot (x - r)}$$

erhalten wir für die Zeit- und Raumkomponenten von $A^\mu = (\Phi, \vec{A})$

$$\Phi = \frac{q}{R}\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{c}\vec{v} \cdot \hat{n}\right)}, \qquad \vec{A} = \frac{q}{R}\frac{\frac{\vec{v}}{c}}{\left(1 - \frac{1}{c}\vec{v} \cdot \hat{n}\right)}$$

Bemerkung: Φ und $\vec{A}$ sind Funktionen von $\vec{R} = \vec{x} - \vec{r}(t')$ und $\vec{v}(t')$.

Wir möchten nun die elektrischen und magnetischen Felder am Punkte $\vec{x}$ zur Zeit t bestimmen. Das $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld lassen sich aus den Potentialen wie folgt bestimmen:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Dies erfordert Differentiation nach den Aufpunktkoordinaten t, x, y und z. In den Potentialen tritt aber auch die retardierte Zeit

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

auf. Wie bereits erwähnt, können wir die Potentiale als Funktion von $\vec{R} = \vec{x} - \vec{r}(t')$ und $\vec{v}(t')$ betrachten. Die gewünschten Ableitungen erhalten wir somit durch die Kettenregel. Hierfür benötigen wir $\partial t'/\partial t$ als auch $\partial t'/\partial x_i$. Wir betrachten zunächst

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{R}^2 = \frac{\partial}{\partial t}R^2 = 2R\frac{\partial}{\partial t}R = 2Rc\frac{\partial}{\partial t}(t-t') = 2Rc\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

Andererseits haben wir aber auch

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{R}^2 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{x} - \vec{r}(t')\right)^2 = 2\vec{R}\left(-\frac{\partial}{\partial t'}\vec{r}(t')\right)\frac{\partial t'}{\partial t} = -2\vec{R}\vec{v}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

Somit

$$2Rc\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = -2\vec{R}\vec{v}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

und

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\vec{v}\vec{R}}{cR}}.$$

Analog findet man indem man

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\vec{R}^2$$

betrachtet, die Beziehung

$$\vec{\nabla}t' = -\frac{\vec{R}}{cR\left(1 - \frac{\vec{v}\vec{R}}{cR}\right)}.$$

Somit berechnet man beispielsweise

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial R_i}\cdot\frac{\partial R_i}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial v_i}\cdot\frac{\partial v_i}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t},\\
\frac{\partial}{\partial x_i}\Phi &= \frac{\partial \Phi}{\partial R_j}\left(\frac{\partial R_j}{\partial x_i} + \frac{\partial R_j}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v_j}\cdot\frac{\partial v_j}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Man findet nach einer längeren Rechnung:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= q\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3}\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R\right) + \frac{q}{c^2\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3}\left\{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c}R\right)\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}\right]\right\},\\
\vec{B} &= \frac{1}{R}\left(\vec{R}\times\vec{E}\right) = \hat{n}\times\vec{E}.
\end{aligned}$$

Bemerkungen: Man schreibt

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{E}_{\text{stat}} + \vec{E}_{\text{acc}}, \\
\vec{E}_{\text{stat}} &= q \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R\right), \\
\vec{E}_{\text{acc}} &= \frac{q}{c^2 \left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^3} \left\{ \vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

$\vec{E}_{\text{stat}}$ nennt man **statisches Feld** oder **Geschwindigkeitsfeld**. Es ist auch dann vorhanden, wenn sich das Teilchen geradlinig-gleichförmig bewegt. Den zweiten Anteil $\vec{E}_{\text{acc}}$ bezeichnet man als **Beschleunigungsfeld**. Es ist proportional zu $\dot{v}$ und verschwindet daher, wenn sich das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.
Beachte: Für große Abstände fallen die Felder wie

$$E_{\text{stat}} \sim \frac{1}{R^2}, \qquad E_{\text{acc}} \sim \frac{1}{R}$$

ab.

Wir betrachten nun die abgestrahlte Leistung. Für $R \to \infty$ dominiert der Strahlungsterm und der Poyntingsche Vektor ergibt sich zu

$$\vec{S}(t,\vec{x}) = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{acc}} \times \vec{B}_{\text{acc}} = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_{\text{acc}} \times \left(\hat{n} \times \vec{E}_{\text{acc}} \right) \approx \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2_{\text{acc}} \hat{n}.$$

Der Poyntingsche Vektor gibt den Energiefluß pro Einheitsfläche pro Einheitszeit t an. Wir interessieren uns für die abgestrahlte Energie pro Raumwinkelelement und pro Einheitszeit t':

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \lim_{R\to\infty} \frac{c}{4\pi} R^2 \left| E_{\text{acc}} \right|^2 \left(\frac{\partial t}{\partial t'} \right).$$

Man findet

$$\begin{aligned}
\frac{dP(t')}{d\Omega} &= \frac{q^2}{4\pi c^3} R^2 \left(\frac{\partial t}{\partial t'} \right) \frac{1}{\left(R - \frac{\vec{R}\vec{v}}{c}\right)^6} \left(\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - \frac{\vec{v}}{c} R \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \right] \right)^2 \\
&= \frac{q^2}{4\pi c} \left(\frac{\partial t}{\partial t'} \right) \frac{1}{\left(1 - \hat{n}\vec{\beta}\right)^6} \left(\hat{n} \times \left[\left(\hat{n} - \vec{\beta} \right) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{\beta} \right] \right)^2 \\
&= \frac{q^2}{4\pi c} \frac{\left(\hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}) \times \frac{\partial}{\partial t} \vec{\beta} \right] \right)^2}{\left(1 - \hat{n}\vec{\beta}\right)^5},
\end{aligned}$$

wobei $\vec{\beta} = \vec{v}/c$.
Bemerkung: Dieser Ausdruck ist unabhängig von R. Die gesamte abgestrahlte Leistung erhält man aus

$$P = \int d\Omega \frac{dP}{d\Omega}.$$

Man erhält die Formel von Lienard:

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\gamma^6 \left[\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\vec{v} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)^2 \right]$$

Bemerkung 1: Nur ein beschleunigtes Teilchen strahlt Energie ab. Bewegt es sich mit konstanter Geschwindigkeit, so strahlt es nicht.

Bemerkung 2: Für $v \ll c$ erhält man

$$P = \frac{2q^2}{3c^3}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)^2.$$

Bemerkung 3: Anwendungen dieser Formeln:

- Eliminiert klassische Atommodelle (ein “klassisches” Elektron auf einer Kreisbahn strahlt kontinuierlich Energie ab).

- Antennen.

- Verlustleistung in Teilchenbeschleunigern.

- Synchrotronstrahlung.

9.5 Strahlungsfelder lokalisierter oszillierender Quellen

Die einfachsten strahlenden Quellen lassen sich durch lokalisierte, oszillierende Ladungs- und Stromdichten modellieren. Lokalisiert bedeutet, daß die Quellen nur ein endliches Gebiet im Raum einnehmen. Wir betrachten eine Zeitabhängigkeit der Ladungs- und Stromdichte von der Form

$$\begin{aligned} \rho(t,\vec{x}) &= \rho(\vec{x})e^{-i\omega t}, \\ \vec{j}(t,\vec{x}) &= \vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Es ist technisch einfacher, harmonische Funktionen in komplexer Form zu verwenden. Darüberhinaus ist die komplexe Form vorteilhaft bei der Modellierung realistischer Quellverteilungen mittels Fouriertransformation in der Variablen t.

Wir werden gleich zeigen, daß dann auch die Potentiale $\Phi(t,\vec{x})$ und $\vec{A}(t,\vec{x})$ sowie die Felder $\vec{E}(t,\vec{x})$ und $\vec{B}(t,\vec{x})$ die Zeitabhängigkeit

$$e^{-i\omega t}$$

haben. Da

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

erhält man die physikalischen Felder durch die Bildung des Realteils:

$$\mathrm{Re}\, e^{-i\omega t} = \cos(\omega t)$$

Die Vorteile der komplexen Notation liegen in den vereinfachten Rechenregeln: Die Umformung

$$e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$$

ist einfacher als

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Wir wollen nun zeigen, daß für die oben definierte Zeitabhängigkeit der Ladungs- und Stromdichte die Zeitabhängigkeit des Vektorpotentials $\vec{A}(t,\vec{x})$ ebenfalls durch $e^{-i\omega t}$ gegeben ist. Verwendet man die Lorenz-Eichung und die retardierte Greensche Funktion, so erhält man für das Vektorpotential

$$\begin{aligned}\vec{A}(t,\vec{x}) &= \frac{1}{c}\int d^3x' \int dt' \frac{\vec{j}(\vec{x}')e^{-i\omega t'}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta\left(t-t'-\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right) \\ &= \frac{1}{c}\int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|}e^{-i\omega t}.\end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|},$$

so erhalten wir

$$\vec{A}(t,\vec{x}) = \vec{A}(\vec{x})e^{-i\omega t}.$$

Analog argumentiert man für das skalare Potential und findet $\Phi(t,\vec{x}) = \Phi(\vec{x})e^{-i\omega t}$. Da sich die $\vec{E}$- und $\vec{B}$ durch Ableitungen des skalaren Potentials und des Vektorpotentials berechnen, ist die Zeitabhängigkeit ebenfalls von der Form $e^{-i\omega t}$.

Wir betrachten die Strahlung außerhalb der Quellen im Vakuum. Wir setzen wieder

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

Im Außenraum gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = 0.$$

Setzt man

$$\begin{aligned}
\vec{E}(t,\vec{x}) &= \vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}, \\
\vec{B}(t,\vec{x}) &= \vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t},
\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}), \\
\vec{E}(\vec{x}) &= \frac{i}{k}\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{x}).
\end{aligned}$$

Daher berechnet man aus der Stromdichte $\vec{j}$ zunächst $\vec{A}$ und anschliessend daraus $\vec{B}$ und $\vec{E}$. $\vec{A}(\vec{x})$ ist gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\vec{j}(\vec{x}').$$

9.6 Multipolstrahlung

In der Elektrostatik hatten wir die inverse Abstandsfunktion systematisch entwickelt:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

Hier tritt nun anstelle der inversen Abstandsfunktion die Funktion

$$\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

auf. Die Verallgemeinerung der Entwicklung für $k \neq 0$ lautet

$$\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 4\pi ik \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} j_l(kr_<)\, h_l^{(1)}(kr_>)\, Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

Die Funktionen $j_l(z)$ sind die **sphärischen Bessel-Funktionen**, die Funktionen $h_l^{(1)}(z)$ die **sphärischen Hankel-Funktionen der ersten Art**. Diese lassen sich ausdrücken durch

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + in_l(z).$$

Hierbei sind $n_l(z)$ die **sphärischen Neumann-Funktionen**. Für $j_l(z)$ und $n_l(z)$ hat man die Formeln

$$\begin{aligned} j_l(z) &= (-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\sin z}{z}, \\ n_l(z) &= -(-z)^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\cos z}{z}. \end{aligned}$$

Außerhalb der Quellen erhält man daher

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{4\pi ik}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} h_l^{(1)}(kr)\, Y_{lm}(\theta,\varphi) \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}')\, j_l\left(kr'\right) Y_{lm}^*(\theta',\varphi').$$

Der Ausdruck

$$\tilde{\vec{q}}_{lm} = \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}')\, j_l\left(kr'\right) Y_{lm}^*(\theta',\varphi')$$

hängt nur von der Quellverteilung ab und stellt eine **Verallgemeinerung der Multipolmomente** dar. Somit erhalten wir die Entwicklung des Vektorpotentials zu

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{4\pi ik}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \tilde{\vec{q}}_{lm} h_l^{(1)}(kr)\, Y_{lm}(\theta,\varphi), \\ & \tilde{\vec{q}}_{lm} = \int d^3x' \vec{j}(\vec{x}')\, j_l\left(kr'\right) Y_{lm}^*(\theta',\varphi'). \end{aligned}$$

Sei d die räumliche Ausdehnung der Quelle und $\lambda = 2\pi/k$ die Wellenlänge. Für klassische makroskopische Quellen und (gewöhnliche) Atome ist die Wellenlänge λ gewöhnlich sehr viel größer als die räumliche Ausdehnung d. Der obige Ausdruck vereinfacht sich dann in zwei Bereichen, die wir als Nahzone und Fernzone bezeichnen wollen und nun diskutieren.

In der **Nahzone**, definiert durch

$$d \ll r \ll \lambda$$

ist das Produkt kr klein gegen 1 und man hat

$$e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} \approx 1.$$

Somit findet man

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{4\pi}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta,\varphi)}{r^{l+1}} \int d^3x' r'^l \vec{j}(\vec{x}') Y_{lm}^*(\theta',\varphi').$$

Die physikalische Interpretation ist wie folgt: In der Nahzone können Retardierungseffekte noch vernachlässigt werden. Bis auf die harmonische Zeitabhängigkeit sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ statische Felder.

In der **Fernzone**, definiert durch

$$d \ll \lambda \ll r$$

kann man nach r'/r entwickeln:

$$\left|\vec{x}-\vec{x}'\right| \approx r - \hat{n}\cdot\vec{x}', \qquad \hat{n} = \tfrac{\vec{x}}{r}.$$

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &\approx \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3x' e^{-ik\hat{n}\cdot\vec{x}'}\vec{j}(\vec{x}') \\ &= \frac{e^{ikr}}{cr}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-ik)^t}{t!}\int d^3x' \left(\hat{n}\cdot\vec{x}'\right)^t \vec{j}(\vec{x}').\end{aligned}$$

Nun ist $\hat{n}\cdot\vec{x}'$ von der Größenordnung d und das Produkt kd ist in der Fernzone klein gegenüber 1. Daher konvergiert die Reihe rasch und wird durch den ersten nicht-verschwindenden Term dominiert. Der Term zu $t=0$ lautet

$$\frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3x'\vec{j}(\vec{x}').$$

9.7 Dipolstrahlung

Wir betrachten nun den $(l=0)$-Term in der Multipolentwicklung. Mit

$$j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr}, \qquad h_0^{(1)}(kr) = \frac{e^{ikr}}{ikr}, \qquad Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

findet man

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3x'\vec{j}(\vec{x}')\frac{\sin(kr')}{kr'}$$

Ist die Quelle nahezu punktförmig, d.h. gilt $d \ll \lambda$, so folgt $kr' \ll 1$ und man kann

$$\frac{\sin(kr')}{kr'} \approx 1$$

setzen. Somit erhalten wir

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3x'\vec{j}(\vec{x}').$$

Bemerkung: Dies ist identisch mit dem $t=0$-Term der Entwicklung in der Fernzone.
Zur Berechnung dieses Integrals betrachten wir zunächst die Kontinuitätsgleichung und erhalten die Relation

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x}) &= 0, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x})e^{-i\omega t} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho(\vec{x})e^{-i\omega t}\right) &= 0, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x}) - i\omega\rho(\vec{x}) &= 0,\end{aligned}$$

Mittels einer partiellen Integration findet man dann

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}) &= \frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3x'\vec{j}(\vec{x}') = -\frac{e^{ikr}}{cr}\int d^3x'\vec{x}'\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{x}')\right) = -\frac{i\omega e^{ikr}}{cr}\int d^3x'\vec{x}'\rho(\vec{x}') \\ &= -\frac{ike^{ikr}}{r}\vec{d}.\end{aligned}$$

Zur Erinnerung

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Die Felder berechnet man mittels

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}) = k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\hat{x}\times\vec{d}, \\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{i}{k}\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{x}) = k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left(\hat{x}\times\vec{d}\right)\times\hat{x} + \frac{e^{ikr}}{r^3}(1-ikr)\left[3\hat{x}\left(\hat{x}\cdot\vec{d}\right)-\vec{d}\right].\end{aligned}$$

Für die zeitabhängigen Felder hat man dann

$$\begin{aligned}\vec{E}(t,\vec{x}) &= \vec{E}(\vec{x})e^{-i\omega t}, \\ \vec{B}(t,\vec{x}) &= \vec{B}(\vec{x})e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

Wir können nun einen (idealisierten) Dipol in der Nah- und Fernzone betrachten. In der Fernzone, d.h. für große Abstände gilt

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= k^2\frac{e^{ikr}}{r}\hat{x}\times\vec{d}, \\ \vec{E}(\vec{x}) &= k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left(\hat{x}\times\vec{d}\right)\times\hat{x}.\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Beide Felder schwingen in Phase.
- Die Beträge der Felder sind von der gleichen Größenordnung.
- Beide Felder stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\hat{x}$.
- Beide Felder fallen mit $1/r$ ab.

Der Dipol in der Nahzone: Da der Dipol als punktförmig vorausgesetzt wurde, ist r immer noch groß gegenüber d, andererseits ist r nun aber klein gegenüber λ:

$$d \ll r \ll \lambda.$$

Die Näherung $kr' \ll 1$ ist weiterhin gültig, außerdem gilt nun auch $kr \ll 1$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{x}) &= i\frac{k}{r^2}\hat{x}\times\vec{d},\\ \vec{E}(\vec{x}) &= \frac{1}{r^3}\left[3\hat{x}\left(\hat{x}\cdot\vec{d}\right)-\vec{d}\right].\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Abgesehen von der harmonischen Zeitabhängigkeit ist das elektrische Feld gleich dem eines statischen elektrischen Dipols.
- Der Betrag von $\vec{B}$ ist um einen Faktor kr kleiner als der von $\vec{E}$, das elektrische Feld dominiert in der Nahzone.
- Die beiden Felder haben eine Phasenverschiebung von $\pi/2$.

9.8 Elektromagnetische Wellen

Wir betrachten nun noch Lösungen der homogenen Gleichung

$$\Box A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = 0.$$

Wir wählen wieder die Lorenz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = 0,$$

Daher erhält man

$$\Box A^\mu = 0.$$

Ausgeschrieben erhält man

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)A^\mu = 0.$$

Behauptung: Das elektrische und das magnetische Feld erfüllen ebenfalls die Wellengleichungen

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{E} &= 0,\\ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{B} &= 0.\end{aligned}$$

Wir beweisen diese Aussage für das elektrische Feld: Wir nehmen die Rotation der zweiten Maxwellschen Gleichung:

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) = 0.$$

Nun ist

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \Delta \vec{E}.$$

Der erste Term verschwindet aufgrund von $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Weiter folgt aus der vierten Maxwellschen Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}.$$

Daher

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = 0.$$

Bemerkung: Die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) f(t, \vec{x}) = 0$$

ist linear in der gesuchten Funktion $f(t, \vec{x})$. Daher gilt das Superpositionsprinzip: Sind f_1 und f_2 Lösungen der Wellengleichung, so ist auch

$$c_1 f_1(t, \vec{x}) + c_2 f_2(t, \vec{x})$$

eine Lösung ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$). Als Lösung findet man

$$f_k(t, \vec{x}) = \exp\left(-i\omega t \pm i\vec{k} \cdot \vec{x} \right),$$

wobei

$$k = \left| \vec{k} \right| = \frac{\omega}{c}.$$

Der Vektor $\vec{k}$ ist der Wellenvektor, sein Betrag k heißt Wellenzahl. Setzt man

$$\omega = 2\pi\nu, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

so findet man die bekannte Relation

$$c = \lambda\nu.$$

Wählt man den Wellenvektor entlang der z-Achse

$$\vec{k} = k\hat{e}_z,$$

dann lautet die allgemeine Lösung zu diesem $\vec{k}$

$$f_k = c_1 e^{ik(z-ct)} + c_2 e^{ik(z+ct)}$$

Die beiden Terme unterscheiden sich durch die Laufrichtung – in Richtung der z-Achse oder entgegengesetzt dazu. Legen wir eine Ausbreitungsrichtung fest, so lauten die Lösungen zu gegebenen $\vec{k} = k\hat{n}$ für das elektrische und magnetische Feld

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \vec{\varepsilon}_E e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \\
\vec{B} &= \vec{\varepsilon}_B e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)}.
\end{aligned}
$$

Die Vektoren $\vec{\varepsilon}_E$ und $\vec{\varepsilon}_B$ sind konstante Vektoren, man nennt sie **Polarisationsvektoren**. Wir betrachten die Divergenz des $\vec{E}$- und des $\vec{B}$-Feldes:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \vec{\varepsilon}_E \cdot \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = i\left(\vec{\varepsilon}_E\cdot\vec{k}\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = 0, \\
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= \vec{\varepsilon}_B \cdot \vec{\nabla} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = i\left(\vec{\varepsilon}_B\cdot\vec{k}\right) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} = 0,
\end{aligned}
$$

also

$$
\vec{\varepsilon}_E\cdot\vec{k} = 0, \qquad \vec{\varepsilon}_B\cdot\vec{k} = 0,
$$

d.h. $\vec{\varepsilon}_E$ und $\vec{\varepsilon}_B$ stehen zur Ausbreitungsrichtung senkrecht. Weiter folgt aus

$$
\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0,
$$

die folgende Relation:

$$
\begin{aligned}
k\hat{n}\times\vec{\varepsilon}_E - \frac{\omega}{c}\vec{\varepsilon}_B &= 0, \\
\vec{\varepsilon}_B &= \hat{n}\times\vec{\varepsilon}_E,
\end{aligned}
$$

d.h. $\vec{\varepsilon}_E$ und $\vec{\varepsilon}_B$ stehen zueinander senkrecht. Das elektromagnetische Feld besitzt daher zwei Einstellungsmöglichkeiten für die Polarisation: Beide stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Bemerkung: In der Quantenelektrodynamik wird ein Photon durch ein Spin 1 Feld beschrieben. Im Allgemeinen hat ein Spin 1 Teilchen drei Einstellungsmöglichkeiten, $m = \pm 1$ und $m = 0$. Für ein Photon tritt nur die Rechts- bzw. Linkspolarisation auf.

Seien $\vec{\varepsilon}_1$ und $\vec{\varepsilon}_2$ zwei (reelle) Polarisationsvektoren, die zueinander senkrecht stehen und darüberhinaus orthogonal zur Ausbreitungsrichtung sind. Die allgemeine Lösung für das elektrische Feld zu gegebenen $\vec{k}$ und einer Ausbreitungsrichtung läßt sich dann schreiben als

$$
\vec{E} = \vec{\varepsilon}_1 e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)} + \vec{\varepsilon}_2 e^{i\alpha} e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x}-\omega t)}.
$$

Im Allgemeinen beschreibt diese Formel eine elliptische Polarisation. Spezialfälle sind die lineare und die zirkulare Polarisation.

Wir haben bisher nur Lösungen mit einer bestimmten Frequenz $\omega = ck$ betrachtet. Die allgemeine Lösung zu einer gegebenen Ausbreitungsrichtung ergibt sich als Überlagerung verschiedener Frequenzen:

$$\vec{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 e^{i\alpha}\right) e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

mit $k = \omega/c$.

9.9 Die Wellengleichung in Materie

Im einfachsten Fall sind nichtleitende Medien elektromagnetisch homogen und isotrop. Sie können daher durch zwei skalare Materialgrößen, die Dielektrizitätskonstante ε und die magnetische Permeabilität μ beschrieben werden, die unabhängig von der Frequenz ω sind. Man findet die Wellengleichungen

$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E} = 0,$$
$$\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{B} = 0,$$

wobei

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Somit

$$\vec{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 e^{i\alpha}\right) e^{i(k\hat{n}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

mit

$$k = \left|\vec{k}\right| = \sqrt{\varepsilon\mu}\frac{\omega}{c}.$$

In dispersiven Medien sind μ und ε abhängig von der Kreisfrequenz ω:

$$\mu = \mu(\omega), \qquad \varepsilon = \varepsilon(\omega).$$

Wir haben nun

$$\vec{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\vec{\varepsilon}_1 + \vec{\varepsilon}_2 e^{i\alpha}\right) e^{i(k(\omega)\hat{n}\cdot\vec{x} - \omega t)}$$

mit

$$k(\omega) = \left|\vec{k}(\omega)\right| = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}\frac{\omega}{c}.$$

Diese Relation zwischen Wellenzahl und Kreisfrequenz wird Dispersionsrelation genannt. Wie diese Relation genau aussieht hängt von dem betrachteten Medium ab.

10 Formulierung der Maxwellschen Theorie mittels Differentialgeometrie

Zur Erinnerung: Wir hatten bisher das freie elektromagnetische Feld durch die Wirkung

$$S = \frac{1}{c} \int d^4x \, \mathcal{L}, \qquad \mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

beschrieben. Die Lagrangedichte ist eichinvariant unter den Transformationen

$$A_\mu(x) \quad \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x).$$

Wir möchten dies nun in einen Zusammenhang mit der Differentialgeometrie stellen.

10.1 Mannigfaltigkeiten

M ist eine n-dimensionale differentierbare Mannigfaltigkeit falls

- M ein topologischer Raum ist,
- und es eine Familie offener Mengen $\{U_i\}$ mit zugehörigen Abbildungen φ_i gibt, so daß

  $$\cup U_i \quad = \quad M$$

  und φ_i ein Homeomorphismus von U_i in eine offene Menge $V_i \subseteq R^n$ ist.
- und falls $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ist die Abbildung $\varphi_{ij} = \varphi_i \varphi_j^{-1}$ von $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ nach $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ beliebig oft differenzierbar.

Das Paar (U_i, φ_i) bezeichnet man als Karte, während die Familie $\{(U_i, \varphi_i)\}$ als Atlas bezeichnet wird.
Bemerkung: M schaut lokal wie der $\mathbb{R}^n$ aus, doch gilt dies nicht global.

Homeomorphismus: Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen ist ein Homeomorphismus, falls sie stetig ist und ein Inverses $f^{-1} : Y \to X$ besitzt, welches ebenfalls stetig ist.

Diffeomorphismus: Homeomorphismus und C^∞.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : I \to M \subset \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung.

$$\left. \frac{d}{dt} \gamma(t) \right|_{t_0} \in \mathbb{R}^n$$

bezeichnet man als Tangentialvektor an M im Punkte $\gamma(t_0)$. Die Gesamtheit aller Tangentialvektoren an M im Punkte p wird mit T_pM bezeichnet. Wir bezeichnen mit T_p^*M den dualen Vektorraum von T_pM, d.h. die Menge aller Linearformen

$$\phi : T_pM \to \mathbb{R}.$$

Die Elemente von $\phi \in T_p^*M$ heißen auch Kotangentialvektoren.

Ein Vektorfeld ist eine Abbbildung

$$X : M \to \mathbb{R}^n$$

X ordnet jedem Punkt $p \in M$ einen Tangentialvektor $X(p) \in \mathbb{R}^n$ zu.

10.2 Differentialformen

Eine Differentialform erster Ordnung ist eine Abbildung

$$\omega : M \to \bigcup_p T_p^*M$$

mit $\omega(p) \in T_p^*M$. Die Differentialform ω ordnet also jedem Punkt $p \in M$ einen Kotangentialvektor $\omega(p) \in T_p^*M$ zu. Wir bezeichnen den Wert von $\omega(p)$ auf dem Tangentialvektor $v \in T_pM$ mit

$$\langle \omega(p), v \rangle$$

Beispiel: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Unter dem totalen Differential df von f versteht man

$$\langle df(p), v \rangle \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(p)}{\partial x_i} v_i.$$

Koordinatendarstellung: Jede Differentialform erster Ordnung läß sich schreiben als

$$\omega \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} f_i(x) dx_i.$$

Kurvenintegrale: Sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine Kurve. Dann wird das Integral von ω über γ definiert als

$$\int_\gamma \omega \quad = \quad \int_a^b \langle \omega(\gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Dachprodukt von Linearformen: Seien ω_1, ..., $\omega_K \in V^*$ Linearformen. Dann wird die Abbildung

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k : V^k \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)(v_1, \ldots, v_k) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} \langle \omega_1, v_1 \rangle & \ldots & \langle \omega_1, v_k \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \omega_k, v_1 \rangle & \ldots & \langle \omega_k, v_k \rangle \end{pmatrix}$$

Koordinatendarstellung von Differentialformen k-ter Ordnung:

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Zurückziehen von Differentialformen: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum f_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

eine k-Form in U. Weiter sei eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : V \to U$$

vorgegeben. Dann definiert man eine k-Form $\varphi^* \omega$ in V durch

$$\varphi^* \omega = \frac{1}{k!} \sum (f_{i_1 \dots i_k} \circ \varphi) \, d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Bemerkung: k-Formen können über k-dimensionale (Unter)-Mannigfaltigkeiten integriert werden.

Beispiel:

$$A = i \frac{e}{\hbar c} A_\mu(x) dx^\mu,$$

definiert eine Eins-Form. Es ist außerdem

$$\begin{aligned} dA &= d\left(i \frac{e}{\hbar c} A_\nu dx^\nu\right) = i \frac{e}{\hbar c} \partial_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ &= i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{2} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) dx^\mu \wedge dx^\nu. \end{aligned}$$

Daher ist es naheliegend die Feldstärkezweiform als

$$F = dA = i \frac{e}{\hbar c} \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

zu definieren.

Bemerkung zu den Vorfaktoren: Wir betrachten den folgenden Differentialoperator:

$$D_A = d + A = d + i \frac{e}{\hbar c} A_\mu dx^\mu = -\frac{i}{\hbar} \left(i\hbar d - \frac{q}{c} A_\mu dx^\mu\right).$$

Nun entspricht $i\hbar\partial_\mu$ in der Quantenmechanik dem Impulsoperator p_μ, so daß in der Klammer die Verallgemeinerung des Terms

$$\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)$$

steht.
Wir berechnen noch $D_A \wedge D_A$ auf eine beliebige Form ω angewandt:

$$\begin{aligned}
(D_A \circ D_A)\,\omega &= \left(d + i\frac{e}{\hbar c}A_\mu dx^\mu\right) \circ \left(d + i\frac{e}{\hbar c}A_\nu dx^\nu\right)\omega \\
&= d\left(i\frac{e}{\hbar c}A_\mu dx^\mu \wedge \omega\right) + i\frac{e}{\hbar c}A_\nu dx^\nu \wedge d\omega - \left(\frac{e}{\hbar c}\right)^2 A_\mu A_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge \omega \\
&= (dA) \wedge \omega
\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}
D_A &= d + A, \\
D_A^2 &= dA + A \wedge A = dA = F.
\end{aligned}$$

D_A bezeichnet man als kovariante Abbleitung, F als Krümmungsform.

10.3 Hodge-Theorie

Sei M eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit. Falls M eine Metrik besitzt, gibt es einen natürlichen Isomorphismus zwischen dem Raum aller r-Formen und dem Raum aller $(m-r)$-Formen, der durch die Hodge-Operation $*$ gegeben ist.

$$\begin{aligned}
* \;:\; & \Omega^r(M) \to \Omega^{m-r}(M) \\
& *(dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_r}) = \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!}\varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_r}{}_{\nu_{r+1}\ldots\nu_m} dx^{\nu_{r+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{\nu_m}
\end{aligned}$$

Bemerkung:

$$** \omega = (-1)^{r(m-r)+1}\omega$$

Mittels der Hodge-Operation kann man ein Skalarprodukt zwischen zwei r-Formen definieren. Sei

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\ldots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k}, \\
\eta &= \frac{1}{r!}\eta_{\mu_1\ldots\mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\mu_k},
\end{aligned}$$

dann ist

$$\begin{aligned}
(\omega, \eta) &= \int\limits_M \omega \wedge *\eta \\
&= \frac{1}{r!}\int\limits_M \omega_{\mu_1\ldots\mu_r}\eta^{\mu_1\ldots\mu_r}\sqrt{|g|}\,dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^m
\end{aligned}$$

Dieses Produkt ist symmetrisch:

$$(\omega,\eta) \;=\; (\eta,\omega)$$

Beispiel:

$$*F \;=\; *\left(i\frac{e}{\hbar c}\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu\right) = \frac{1}{4}i\frac{e}{\hbar c}F^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}dx^\rho \wedge dx^\sigma = \left(i\frac{e}{\hbar c}\right)\frac{1}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu .$$

Wir haben weiter

$$(F,F) \;=\; \frac{1}{2}\left(i\frac{e}{\hbar c}\right)^2 \int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

und daher

$$S \;=\; \frac{1}{c}\int d^4x\, \mathcal{L} \;=\; \frac{1}{8\pi c}\left(\frac{\hbar c}{e}\right)^2 (F,F)\,.$$

Die Wirkung des freien elektromagnetischen Feldes ist daher das Betragsquadrat der Feldstärkezweiform (der Krümmungsform) bezüglich des durch die Hodge-Theorie definierten Skalarproduktes für Differentialformen.

11 Grenzen der Elektrodynamik

11.1 Die Selbstenergie

Wir betrachten zwei Punktladungen an den Orten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$. Beide Punktladungen tragen die Elementarladung e. Das Potential ist durch

$$\Phi = \frac{e}{|\vec{x}-\vec{x}_1|} + \frac{e}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}$$

gegeben, und die Feldstärke ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \\ \vec{E}_j &= -e\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_j|}\right). \end{aligned}$$

Die gesamte potentielle Energie des Systems berechnet sich zu

$$U = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \vec{E}^2 = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \left(\vec{E}_1^2 + 2\vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 + \vec{E}_2^2\right).$$

Die Wechselwirkungsenergie ist

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{WW}} &= \frac{1}{4\pi}\int d^3x\, \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2 = \frac{e^2}{4\pi}\int d^3x\, \vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\right)\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}\right) \\ &= -\frac{e^2}{4\pi}\int d^3x\, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\Delta\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|} = e^2\int d^3x\, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_1|}\delta(\vec{x}-\vec{x}_2) \\ &= \frac{e^2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}. \end{aligned}$$

für $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ ist dieser Ausdruck endlich. Die beiden anderen Terme bezeichnet man als Selbstenergien. Wegen der Translationsinvarianz ist

$$\frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \vec{E}_1^2 = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \vec{E}_2^2.$$

Wir betrachten daher die Selbstenergie eines Teilchens mit Ladung q im Ursprung $\vec{x} = \vec{0}$:

$$U_{\mathrm{self-energy}} = \frac{1}{8\pi}\int d^3x\, \vec{E}^2 = \frac{e^2}{8\pi}\int d^3x\, \frac{1}{r^4} = \frac{e^2}{2}\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r^2}$$

Dieses Integral divergiert für $r \to 0$. Für eine exakte Behandlung dieses Problems ist zu beachten, daß für kleine Abstände die klassische Elektrodynamik durch eine entsprechende Quantentheorie, die Quantenelektrodynamik (QED), ersetzt werden muß. Es stellt sich jedoch heraus, daß auch in der Quantenelektrodynamik die Selbstenergie divergiert. Die Lösung dieses Problems wurde erst in den letzten 50 Jahren entwickelt und ist unter dem Begriff “Renormierung” bekannt. Die Grundzüge dieser Ideen sollen nun kurz dargestellt werden.

11.2 Regularisierung

Der erste Schritt ist die Einführung eines ad-hoc Regularisierungschemas, so daß alle Ausdrücke endlich sind. Eine Möglichkeit besteht in der Einführung eines Cut-offs:

$$U_{\mathrm{self-energy,reg}} = \frac{e^2}{2}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2r_0}.$$

11.3 Renormierung

Im zweiten Schritt ersetzt man die unrenormierten Größen durch die renormierten Größen, welche per Definition endlich sind, und Renormierungskonstanten, welche die Divergenzen absorbieren. Im vorliegenden Beispiel würde man die renormierte Energie einführen als

$$U_{\mathrm{renorm}} = U - \delta U,$$

und δU zum Beispiel als

$$\delta U = \frac{e^2}{r_0}$$

wählen.
Bemerkung: Der Gegenterm δU absorbiert alle Divergenzen, die Aufteilung endlicher Terme zwischen δU und U_{renorm} ist aber beliebig. Eine bestimmte Wahl dieser Aufteilung legt ein Renormierungschema fest. In der Quantenfeldtheorie verwendet man eine multiplikative Renormierung für alle fundamentalen Parameter. So zum Beispiel für die Elementarladung:

$$e = Z_e e_{\mathrm{renorm}}.$$

Im Allgemeinen werden alle Größen die in der Lagrangedichte bzw. Lagrangefunktion vorkommen, renormiert. Für die Wirkung

$$S = -mc\int\limits_a^b ds - \frac{1}{16\pi c}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{q}{c}\int\limits_a^b dx^\mu A_\mu(x),$$

sind dies die Größen A^μ, m und q.

11.4 Die Renormierungsgruppengleichung

Regularisierung und Renormierung führen technische Parameter ein, wie zum Beispiel der Cut-off r_0 oder Parameter, die beschreiben wie endliche Terme zwischen den Renormierungskonstanten und den renormierten Größen aufgeteilt werden. Eine wichtige Aussage ist, daß die unrenormierten Größen von diesen Parametern unabhängig sind. Verwendet man zum Beispiel die Cut-off-Regularisierung, so gilt

$$\frac{d}{dr_0}e = 0.$$

Mit $e = Z_e e_{\text{renorm}}$ erhält man

$$\frac{d}{dr_0} e_{\text{renorm}} \quad = \quad -e_{\text{renorm}} \frac{d}{dr_0} \ln Z_e.$$

Diese Gleichung nennt man die Renormierungsgruppengleichung. Sie gibt die Variation der renormierten Ladung mit der Skala r_0 an.