

Klassische Mechanik

Stefan Weinzierl

5. Januar 2023

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	4
1.1	Literatur	4
2	Newtonsche Mechanik	5
2.1	Die Formalismen der klassischen Mechanik	5
2.2	Die Grenzen der klassischen Mechanik	6
2.3	Die Konzepte der klassischen Mechanik	7
2.3.1	Der Massepunkt	7
2.3.2	Die Zeit	7
2.3.3	Der Raum	8
2.3.4	Die Galilei-Gruppe	11
2.3.5	Abgeschlossene Systeme und Teilsysteme	13
2.3.6	Inertialsysteme	13
2.4	Die Formulierung der Newtonschen Mechanik	14
2.4.1	Grundbegriffe	14
2.4.2	Das Newtonsche Gravitationsgesetz	14
2.4.3	Die Newtonschen Gesetze der Mechanik	15
2.5	Kräfte	17
2.5.1	Zentralkräfte	17
2.5.2	Konservative Kräfte	19
2.6	Allgemeine Aussagen über N -Teilchensysteme	20
2.6.1	Erhaltungsgrößen	21
2.6.2	Das Virialtheorem	24
2.6.3	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen	26
2.7	Der harmonische Oszillator*	27
2.8	Das Zweikörperproblem	30
2.8.1	Die Keplerschen Gesetze	36
2.9	Streuung von Teilchen*	37
2.9.1	Streuung an einer harten Kugel*	46
2.9.2	Rutherford-Streuung*	47
2.10	Rotierende Bezugssysteme	49
3	Der Lagrange-Formalismus	53
3.1	Die Lagrange-Formulierung der klassischen Mechanik	53
3.2	Das Wirkungsprinzip	58
3.3	Weitere Anwendungen der Variationsrechnung*	61
3.4	Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten	66
3.5	Das d'Alembertsche Prinzip	70
3.6	Lagrange-Multiplikatoren	77
3.7	Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen	83
3.8	Systeme mit isoperimetrischen Zwangsbedingungen	84

3.9	Erhaltungsgrößen und das Noether-Theorem	85
3.9.1	Eichinvarianz	86
3.9.2	Koordinatentransformationen	86
3.9.3	Autonome Systeme	88
3.9.4	Zyklische Variablen	90
3.9.5	Das Noether-Theorem	92
4	Der Hamilton-Formalismus	101
4.1	Implizite Funktionen	102
4.2	Legendre-Transformationen	104
4.3	Die Hamilton-Funktion	108
4.4	Die Hamilton-Gleichungen	111
4.5	Kanonische Transformationen	115
4.6	Die Poisson-Klammern	127
4.7	Der Phasenraum und der Satz von Liouville	131
4.8	Die Hamilton-Jacobische Theorie*	135
4.9	Das Routhsche Verfahren*	136
5	Anwendungen	139
5.1	Der starre Körper	139
5.2	Kleine Schwingungen	147

1 Einführung

Diese Vorlesung behandelt die klassische Mechanik in den Formulierungen von Newton, Lagrange und Hamilton. Sie ist hervorgegangen aus einer zweisemestrigen Vorlesung, bestehend einerseits aus einer "Einführung in die theoretische Physik", die ich im Sommersemester 2010 an der Universität Mainz gehalten habe und andererseits einer Vorlesung "Analytische Mechanik", die im darauffolgenden Wintersemester 2010/11 folgte, sowie einer einsemestrigen Vorlesung "Klassische Mechanik", die ich im Sommersemester 2014 ebenfalls an der Universität Mainz gehalten habe. Klarerweise steht dem Dozenten im Rahmen einer einsemestrigen Vorlesung nicht soviel Zeit zur Verfügung. Abschnitte in diesem Skript, die ich im Rahmen einer einsemestrigen Vorlesung nicht behandelt habe, sind mit einem Stern (*) gekennzeichnet. Sie können entweder durch entsprechende Übungsaufgaben behandelt werden oder sind den interessierten Studierenden zum Selbststudium empfohlen.

1.1 Literatur

Literatur:

- H. Goldstein, Klassische Mechanik, Aula-Verlag, Wiesbaden
- L. Landau und E. Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1: Mechanik, Akademie-Verlag, Berlin
- F. Scheck, Theoretische Physik 1: Mechanik, Springer, Berlin
- A. Sommerfeld, Vorlesungen über theoretische Physik, Band 1: Mechanik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig

2 Newtonsche Mechanik

2.1 Die Formalismen der klassischen Mechanik

Die klassische Mechanik befasst sich mit der Bewegung physikalischer Körper. Wir werden uns zunächst auf die Newtonsche Formulierung beschränken. In dieser Formulierung ergibt sich die Bahn eines Teilchens durch Lösen der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t), \quad \vec{p} = m\dot{\vec{x}}.$$

In dieser Vorlesung werden wir weitere Formulierungen der klassischen Mechanik kennenlernen. In der Formulierung von Lagrange wird ein Teilchen durch eine Lagrangefunktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

beschrieben. Die Bahn des Teilchens ergibt sich durch Lösen der Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.$$

In der Formulierung von Hamilton wird ein Teilchen durch eine Hamiltonfunktion

$$H(\vec{x}, \vec{p}, t)$$

beschrieben. Die Bahn des Teilchens ergibt sich durch Lösen der Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Alle diese Formulierungen können aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung hergeleitet werden. Unter der Wirkung versteht man das Integral

$$S = \int_{t_a}^{t_b} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) dt.$$

Die Bahn eines Teilchens ergibt sich als diejenige Bahn, für die die Variation der Wirkung verschwindet:

$$\delta S = 0.$$

Das Wirkungsprinzip ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte theoretische Physik.

2.2 Die Grenzen der klassischen Mechanik

Die klassische Mechanik liefert eine zufriedenstellende Beschreibung der Physik, falls die folgenden Annahmen erfüllt sind:

1. **Alle auftretenden Geschwindigkeiten sind klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit.**

$$v \ll c.$$

Dies bedeutet, daß Korrekturen der speziellen Relativitätstheorie vernachlässigt werden können.

Es impliziert auch, daß Zeit und Raum getrennt betrachtet werden können.

Die Lichtgeschwindigkeit wird als unendlich groß betrachtet. In diesem Falle ist die Signalausbreitung instantan und man spricht von einer Fernwirkungstheorie. So würde zum Beispiel eine abrupte Änderung der Position der Sonne instantan eine Änderung der Bahn der Erde bewirken.

Können die auftretenden Geschwindigkeiten gegenüber der Lichtgeschwindigkeit nicht vernachlässigt werden, so ist eine Beschreibung durch die relativistische Mechanik notwendig.

2. **Alle auftretenden Wirkungsgrößen sind groß gegenüber der Planckschen Konstante.**

$$\Delta p_i \Delta x_i \gg \hbar, \quad \Delta E \Delta t \gg \hbar, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Dies bedeutet, daß Quantenkorrekturen vernachlässigt werden können.

Es impliziert auch, daß sowohl Ort und Impuls als auch Energie und Zeit gleichzeitig gemessen werden können.

Sind die auftretenden Wirkungsgrößen in der Größenordnung der Planckschen Konstante, so ist eine Beschreibung durch die Quantenmechanik notwendig.

3. **Alle auftretenden Massen sind klein.**

$$\frac{r_s}{r} \ll 1, \quad r_s = \frac{2Gm}{c^2}.$$

Dies bedeutet, daß die Krümmung des Raumes vernachlässigt werden kann. Die Korrekturen zur Metrik sind von der Größenordnung r_s/r , wobei r_s der Schwarzschildradius der Masse m ist.

Sind die auftretenden Massen hinreichend groß, so daß die Korrekturen zur Metrik des Raumes nicht vernachlässigt werden können, so ist eine Beschreibung durch die allgemeine Relativitätstheorie notwendig.

2.3 Die Konzepte der klassischen Mechanik

2.3.1 Der Massepunkt

Unter einem Massepunkt versteht man einen Körper infinitesimaler Ausdehnung mit einer endlichen Masse m .

Das Konzept eines Massepunktes stellt eine vernünftige Näherung für einen Körper dar, dessen Abmessungen gegenüber allen anderen Längenskalen des Problems vernachlässigt werden können. Die Beschreibung mit Hilfe von Massepunkten vereinfacht die Lösung des Problems. Ein einzelner Massepunkt ist nicht deformierbar, noch besitzt er einen Eigendrehimpuls.

Jedem Massepunkt ist zu jeder Zeit ein eindeutiger Ort

$$\vec{x} = \vec{x}(t)$$

zugeordnet. Wir werden auch oft die Bezeichnung “Teilchen” für einen Massepunkt verwenden.

2.3.2 Die Zeit

In der klassischen Mechanik gibt es keine Obergrenze für die Signalausbreitungsgeschwindigkeit. Daher können in einem klassischen Universum alle Uhren perfekt miteinander synchronisiert werden. Man sagt daher, daß eine absolute Zeit existiert.

Zwei Ereignisse (\vec{x}_1, t_1) und (\vec{x}_2, t_2) die zu verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 an verschiedenen Orten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 geschehen, können in Bezug auf die Zeit wie folgt in Bezug stehen:

1. $t_1 < t_2$: Das Ereignis (\vec{x}_1, t_1) ereignet sich vor (\vec{x}_2, t_2) .
2. $t_1 = t_2$: Die beiden Ereignisse geschehen gleichzeitig.
3. $t_1 > t_2$: Das Ereignis (\vec{x}_1, t_1) ereignet sich nach (\vec{x}_2, t_2) .

Diese Aussage gilt in der klassischen Mechanik unabhängig vom Bezugssystem. In der speziellen Relativitätstheorie werden wir lernen, daß die Begriffe “Vorzeitigkeit”, “Gleichzeitigkeit” und “Nachzeitigkeit” vom Bezugssystem abhängig sind und nicht mehr absolut sind.

Wir können die Werte, die die Variable t annehmen kann, mit den reellen Zahlen identifizieren. Der Zeitraum ist also ein eindimensionaler reeller Vektorraum. Die Wahl des Nullpunktes ist dabei Konvention. Hat man den Nullpunkt festgelegt, so definiert dies ein Zeitsystem. Wir betrachten nun zwei Zeitsysteme mit möglicherweise unterschiedlichen Konventionen bezüglich des Nullpunktes. Wir bezeichnen die Zeitvariable im System T mit t , die Zeitvariable im System T' dagegen mit t' . Sei weiter t_0 der Wert der Zeitvariable im System T , der dem Wert $t' = 0$ im System T' entspricht. Wir können nun jeden Wert t in den entsprechenden Wert t' umrechnen:

$$t' = t - t_0.$$

Wir betrachten nun alle möglichen Transformationen von einem Zeitsystem in ein anderes. Sei die Transformation von dem System T in das System T' wie oben gegeben durch

$$t' = t - t_0$$

und sei weiter eine Transformation von dem System T' in ein weiteres System T'' gegeben durch

$$t'' = t' - t_1,$$

so definiert die Hintereinanderausführung dieser beiden Transformation eine Transformation von T nach T'' . Die Zeitkoordinaten transformieren sich hierbei wie

$$t'' = t - t_0 - t_1.$$

Ebenso gibt es zu der Transformation von T nach T' eine Umkehrtransformation von T' nach T , die durch

$$t = t' + t_0$$

beschrieben wird. Desweiteren soll erwähnt werden, daß die (triviale) Transformation von T nach T durch

$$t = t$$

beschrieben wird. Aus diesen Tatsachen folgt, daß die Menge aller Transformationen von Zeitsystemen eine Gruppe bilden, die isomorph zu der Abelschen Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ ist. Wir bezeichnen diese Gruppe als die Gruppe der Zeittranslationen.

Solche Transformationsgruppen haben eine fundamentale Bedeutung in der theoretischen Physik. Wir werden später lernen, daß aus der Invarianz eines Systems unter den obigen Zeittransformationen die Energieerhaltung folgt.

2.3.3 Der Raum

In der klassischen Mechanik wird der Ortsraum durch einen dreidimensionalen Raum isomorph zu \mathbb{R}^3 beschrieben. Ortsvektoren sind Vektoren in diesem Vektorraum:

$$\vec{r} \in \mathbb{R}^3.$$

Der Abstand zweier Punkte ist durch den euklidischen Abstand gegeben:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Der Raum ist mit dem euklidischen Skalarprodukt ausgestattet:

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'.$$

Der Raum wird als homogen und isotrop betrachtet. Homogenität bedeutet, daß kein Punkt ausgezeichnet ist, insbesondere ist auch kein Punkt als Ursprung des Koordinatensystems ausgezeichnet. Die Wahl des Ursprungs ist daher wieder Konvention. Wir betrachten wieder zwei Koordinatensystem O und O' , die sich durch eine unterschiedliche Wahl des Koordinatenursprungs unterscheiden. Wir können wieder die Koordinaten (x, y, z) im System O in die entsprechenden Koordinaten (x', y', z') im System O' transformieren:

$$\begin{aligned}x' &= x - x_0, \\y' &= y - y_0, \\z' &= z - z_0,\end{aligned}$$

wobei (x_0, y_0, z_0) die Koordinaten des Ursprungs des Systems O' in O sind. Sei nun O'' ein weiteres Koordinatensystem. Die Transformation von O' nach O'' sei gegeben durch

$$\begin{aligned}x'' &= x' - x_1, \\y'' &= y' - y_1, \\z'' &= z' - z_1.\end{aligned}$$

Dann definiert die Hintereinanderausführung dieser beiden Transformationen eine Transformation von O nach O'' , deren explizite Form durch

$$\begin{aligned}x'' &= x - (x_0 + x_1), \\y'' &= y - (y_0 + y_1), \\z'' &= z - (z_0 + z_1).\end{aligned}$$

gegeben ist. Ebenso gibt es zu jeder Transformation von O nach O' eine Rücktransformation von O' nach O . Ausserdem existiert die triviale Transformation von O nach O . Die Menge aller Transformationen des Ursprunges bilden daher eine Gruppe, die isomorph zu der Abelschen Gruppe $(\mathbb{R}^3, +)$ ist. Diese Gruppe bezeichnet man als die Gruppe der Ortstranslationen. Ist ein physikalisches System invariant unter dieser Gruppe, so folgt hieraus – wie wir später sehen werden – die Impulserhaltung.

Isotropie bedeutet, daß keine Richtung im Raum ausgezeichnet ist. Insbesondere können wir die Richtung der drei Koordinatenachsen frei wählen. Wir betrachten wieder zwei Koordinatensysteme O und O' . Der Einfachheit halber wollen wir zunächst annehmen, daß in beiden Systemen der Ursprung gleich gewählt wurde. Sei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ eine Orthonormalbasis des Koordinatensystems O und $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ eine Orthonormalbasis des Koordinatensystems O' . Des weiteren nehmen wir an, daß beide Basen rechtshändig orientiert sind. Dann transformieren sich die Koordinaten von O nach O' wie folgt:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hierbei ist

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

eine orthogonale 3×3 Matrix mit Determinante 1:

$$R^T \cdot R = \mathbf{1}, \quad \det R = 1.$$

Die Matrix R beschreibt eine Drehung des Koordinatensystems.

Sei nun R_1 die Matrix der Drehung, die die Transformation des Koordinatensystems O nach O' beschreibt. Sei R_2 eine weitere Drehmatrix, die die Transformation des Koordinatensystems O' nach O'' beschreibt. Die Hintereinanderausführung beschreibt nun eine Transformation von O nach O'' . Die entsprechende Drehmatrix ist durch das Matrizenprodukt

$$R_3 = R_2 \cdot R_1$$

gegeben. R_3 ist wieder eine orthogonale Matrix mit Determinante Eins:

$$\begin{aligned} R_3^{-1} &= (R_2 \cdot R_1)^{-1} = R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} = R_1^T \cdot R_2^T = (R_2 \cdot R_1)^T = R_3^T, \\ \det R_3 &= \det(R_2 \cdot R_1) = (\det R_2) \cdot (\det R_1) = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Zu jeder Drehtransformation mit Drehmatrix R existiert eine Umkehrtransformation, deren Drehmatrix durch R^{-1} gegeben ist. Ferner beschreibt die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ die triviale Transformation, die ein Koordinatensystem O in sich selbst überführt. Daher bilden die Drehtransformationen eine Gruppe, die man als die spezielle orthogonale Gruppe

$$SO(3, \mathbb{R})$$

bezeichnet. $SO(3, \mathbb{R})$ enthält alle reellen 3×3 -Matrizen, die orthogonal sind und für die $\det R = 1$ gilt. In der Bezeichnung " $SO(3, \mathbb{R})$ " steht das " O " für die Orthogonalitätsbedingung

$$R^T \cdot R = \mathbf{1},$$

während das " S " für die zusätzliche Bedingung

$$\det R = 1$$

steht. Die Verknüpfung in dieser Gruppe ist durch die Matrizenmultiplikation gegeben. Hierbei ist zu beachten, daß die Multiplikation im allgemeinen nicht kommutativ ist:

$$R_1 \cdot R_2 \neq R_2 \cdot R_1.$$

Im Zusammenhang mit physikalischen Systemen bezeichnen wir diese Gruppe als Rotations- oder Drehgruppe. Ist ein physikalisches System invariant unter der Rotationsgruppe, so folgt

hieraus – wie wir später sehen werden – die Drehimpulserhaltung.

Wir betrachten noch eine weitere Transformation von einem Koordinatensystemen O in ein Koordinatensystem O' , gegeben durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}x' &= -x, \\y' &= -y, \\z' &= -z.\end{aligned}$$

Diese Transformation nennt man Raumspiegelung. Sie überführt ein rechtshändiges Koordinatensystem in ein linkshändiges Koordinatensystem. Die Raumspiegelung läßt sich auch durch eine 3×3 -Matrix

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Die Matrix P ist offensichtlich orthogonal, es gilt

$$P^{-1} = P^T = P,$$

allerdings gilt für die Determinante

$$\det P = -1.$$

Die Menge aller 3×3 -Matrizen, die die Orthogonalitätsbedingung

$$R^T \cdot R = \mathbf{1}$$

erfüllen, bilden wieder eine Gruppe, die man als die orthogonale Gruppe $O(3, \mathbb{R})$ bezeichnet. Für ein Element $R \in O(3, \mathbb{R})$ gilt

$$\det R = \pm 1,$$

wie man leicht aus

$$1 = \det \mathbf{1} = \det (R^T \cdot R) = (\det R^T) \cdot (\det R) = (\det R)^2$$

herleitet.

2.3.4 Die Galilei-Gruppe

Wir wollen noch zwei weitere Koordinatentransformationen betrachten: Bei der ersten bewegt sich das Bezugssystem O' gegenüber dem System O mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. In diesem Fall transformieren sich die Koordinaten wie folgt:

$$x' = x - v_x t,$$

$$\begin{aligned}y' &= y - v_y t, \\z' &= z - v_z t, \\t' &= t.\end{aligned}$$

Die zweite und letzte Transformation die wir noch betrachten wollen, ist die Zeitumkehr, gegeben durch

$$t' = -t.$$

Wir haben nun die verschiedenen Grundtransformationen kennengelernt: Verschiebung des Ursprungs der Zeitachse, Verschiebung des Ursprungs des Ortsraumes, Drehung des Ortsraumes, Transformation auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem, Raumspiegelung und Zeitumkehr. Alle Transformationen, die aus diesen Grundtransformationen erzeugt werden können, bilden eine Gruppe, die man die Galilei-Gruppe nennt. Die allgemeine Koordinatentransformation der Galilei-Gruppe lautet

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= \lambda_1 R \cdot \vec{r} - \vec{v} \cdot t - \vec{r}_0, \\t' &= \lambda_2 t - t_0,\end{aligned}$$

wobei $R \in SO(3, \mathbb{R})$, $\vec{v}, \vec{r}_0 \in \mathbb{R}^3$, $t_0 \in \mathbb{R}$ und λ_1, λ_2 die Werte $\{-1, 1\}$ annehmen. Eine Drehmatrix aus $SO(3, \mathbb{R})$ kann durch die Angabe von drei Parametern (z.B. den Euler-Winkeln) eindeutig beschrieben werden. Daher sind zur eindeutigen Spezifikation einer Galilei-Transformation die Angabe von zehn reellen Parametern und zwei Vorzeichen notwendig.

Sei nun eine Galilei-Transformation von dem System S in das System S' spezifiziert durch die Parameter

$$(R, \vec{v}, \vec{r}_0, t_0, \lambda_1, \lambda_2)$$

und sei ausserdem eine weitere Galilei-Transformation von dem System S' in ein drittes System S'' gegeben durch

$$(R', \vec{v}', \vec{r}'_0, t'_0, \lambda'_1, \lambda'_2).$$

Dann gilt für die Parameter

$$(R'', \vec{v}'', \vec{r}''_0, t''_0, \lambda''_1, \lambda''_2)$$

der Galilei-Transformation von S nach S'' :

$$\begin{aligned}R'' &= R' \cdot R, \\ \vec{v}'' &= \lambda'_1 R' \cdot \vec{v} + \lambda_2 \vec{v}', \\ \vec{r}''_0 &= \lambda'_1 R' \cdot \vec{r}_0 - \vec{v}' t_0 + \vec{r}'_0, \\ t''_0 &= \lambda'_2 t_0 + t'_0, \\ \lambda''_1 &= \lambda'_1 \lambda_1, \\ \lambda''_2 &= \lambda'_2 \lambda_2.\end{aligned}$$

2.3.5 Abgeschlossene Systeme und Teilsysteme

In der Mechanik unterscheiden wir zwischen abgeschlossenen Systemen und Teilsystemen. Erstere sind von der Außenwelt entkoppelt, während letztere explizit an die Außenwelt gekoppelt sind. Dies kann zum Beispiel durch Schwerkraftfelder, elektrische oder magnetische Felder realisiert sein.

In der Praxis hat man natürlich nie ein perfektes abgeschlossenes System, doch lassen sich oft Systeme in guter Näherung als abgeschlossen beschreiben. So lassen sich zum Beispiel die Planetenbahnen in unserem Sonnensystem gut beschreiben, indem man unser Sonnensystem als ein abgeschlossenes System betrachtet. Natürlich haben auch weiter entfernte Sterne einen Einfluß auf die Planetenbahnen, doch ist dieser Effekt so klein, so daß er vernachlässigt werden kann.

Betrachten wir andererseits zwei Massepunkte, wobei der eine Massepunkt eine Masse in der Größenordnung der Erdmasse hat, der andere eine Masse, die mit der Masse eines Apfels vergleichbar ist. Interessiert man sich für die Bahnkurve des Apfels, so ist es vorteilhaft, den Apfel als ein Teilsystem zu betrachten, das sich in einem äusseren Schwerkraftfeld befindet, welches durch die Erde hervorgerufen wird. Natürlich übt auch der Massepunkt des Apfels eine Anziehungskraft auf den Massepunkt der Erde aus. Diese Anziehungskraft modifiziert die Bahnkurve des Massepunktes der Erde, doch ist dieser Effekt so klein, so daß er getrost vernachlässigt werden kann.

2.3.6 Inertialsysteme

Bezugssysteme, in denen sich Teilchen, auf die keine Kräfte wirken, mit konstanter Geschwindigkeit entlang gerader Linien bewegen, nennt man Inertialsysteme.

Ist S ein Inertialsystem, und S' ein Bezugssystem, daß aus S durch eine Galilei-Transformation erhalten wird, so ist auch S' ein Inertialsystem.

Andererseits gilt auch: Sind S und S' zwei Inertialsysteme, so gibt es eine Galilei-Transformation, die S in S' überführt.

Die Bedeutung der Inertialsysteme liegt in dem **Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik** von Galilei: Die Gesetze der klassischen Mechanik sind in allen Inertialsystemen gleich.

Kein Inertialsystem ist zum Beispiel ein rotierendes Bezugssystem. Hier treten Scheinkräfte wie die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft auf.

2.4 Die Formulierung der Newtonschen Mechanik

2.4.1 Grundbegriffe

Wir beschreiben die Position eines Massepunktes durch

$$\vec{x}(t)$$

Die Position kann von der Zeit t abhängen, wir sprechen daher von einer Bahnkurve. Die Geschwindigkeit ist definiert als die Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit:

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{x}(t).$$

Als Beschleunigung versteht man die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit – oder äquivalent hierzu die zweite Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit:

$$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t).$$

Ableitungen nach der Zeit werden auch oft mit einem Punkt gekennzeichnet:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \dot{\vec{x}}(t), \\ \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{x}}(t),\end{aligned}$$

Der Impuls eines Massepunktes ist gegeben durch das Produkt seiner Masse mit der Geschwindigkeit:

$$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t).$$

Der Drehimpuls ist definiert durch das Kreuzprodukt des Ortsvektors mit dem Impulsvektor:

$$\vec{L}(t) = \vec{x}(t) \times \vec{p}(t) = m(\vec{x}(t) \times \vec{v}(t)).$$

Wir bezeichnen Kräfte mit dem Buchstaben \vec{F} (von englisch “force”), auch der Buchstabe \vec{K} (von deutsch “Kraft”) ist gebräuchlich.

Das Drehmoment bezeichnen wir mit \vec{M} . Wirkt auf einen Massepunkt die Kraft \vec{F} , so ist das zugehörige Drehmoment (bezüglich des Ursprungs des Koordinatensystems):

$$\vec{M} = \vec{x} \times \vec{F}.$$

2.4.2 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Das Newtonsche Gravitationsgesetz beschreibt die Kraft, die ein Massepunkt der Masse m_j auf einen Massepunkt der Masse m_i ausübt. Diese Kraft ist gegeben durch

$$\vec{F}_{ij} = Gm_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}.$$

Hierbei ist G die Newtonsche Konstante:

$$G = (6.67428 \pm 0.00067) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Die Position des Teilchens i ist durch den Ortsvektor \vec{x}_i gegeben, die Position des Teilchens j durch den Ortsvektor \vec{x}_j . Die Gravitationskraft ist immer anziehend. Die Kraft ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes. Beachte hierzu, daß

$$\hat{n} = \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|}$$

einen Einheitsvektor definiert, der von \vec{x}_i in Richtung \vec{x}_j zeigt. Das Gravitationsgesetz läßt sich also auch als

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^2} \hat{n}$$

schreiben.

Das Gravitationsgesetz läßt sich auf Systeme mit mehreren Teilchen verallgemeinern. Liegt ein System von N Teilchen vor und betrachten wir die Kraft, die auf das i -te Teilchen wirkt, so gilt

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} Gm_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}.$$

2.4.3 Die Newtonschen Gesetze der Mechanik

Die Newtonschen Gesetze der Mechanik lauten:

1. Ein Teilchen, auf das keine Kräfte wirken, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang gerader Linien.
2. Die Kraft auf ein Teilchen ist gleich dem Produkt seiner Masse und seiner Beschleunigung

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

3. Die Kräfte von Aktion und Reaktion sind vom gleichen Betrag und entgegengesetzt. Übt ein Teilchen A eine Kraft \vec{F} auf ein Teilchen B aus, so übt Teilchen B eine Kraft $-\vec{F}$ auf Teilchen A aus.

Bemerkungen:

- Das erste Newtonsche Gesetz beschreibt Inertialsysteme. Wir hatten Inertialsysteme gerade so definiert, daß in ihnen Teilchen, auf die keine Kräfte wirken, sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang gerader Linien bewegen.

- Das zweite Newtonsche Gesetz stellt einen Zusammenhang zwischen der Kraft, die auf ein Teilchen wirkt, und der Änderung der Geschwindigkeit her. Diese Gleichung nennt man die **Bewegungsgleichung**.
- Das dritte Newtonsche Gesetz verifiziert man unmittelbar für ein Zweikörpersystem. Betrachten wir zwei Massen m_1 und m_2 an den Orten \vec{x}_1 und \vec{x}_2 , so ist die Kraft, die Teilchen 1 auf Teilchen 2 ausübt

$$\vec{F}_{21} = Gm_1m_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}.$$

Andererseits ist die Kraft, die Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausübt

$$\vec{F}_{12} = Gm_1m_2 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}.$$

Es gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

- Betrachten wir nun einen Massepunkt m im Potential einer Masse M , welche sich im Ursprung befindet. Die Bewegungsgleichung für den Massepunkt m lautet:

$$m_t \vec{a} = -Gm_s M \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}.$$

Wir haben auf der linken Seite einen Index “t”, der die träge Masse bezeichnen soll, hinzugefügt. Auf der rechten Seite haben wir einen Index “s”, der die schwere Masse bezeichnen soll, hinzugefügt. Es ist nicht notwendig, daß diese beiden Größen gleich sein müssen. Es stellt sich jedoch heraus, daß im Rahmen der experimentellen Meßgenauigkeit stets

$$m_t = m_s$$

gilt. Wir werden daher im Laufe der Vorlesung nicht weiter zwischen der trägen Masse und der schweren Masse unterscheiden. Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Gleichheit von schwerer und träger Masse als Äquivalenzprinzip bezeichnet.

- Wir zeigen noch, daß das erste und zweite Newtonsche Gesetz miteinander verträglich sind. Wirkt auf ein Teilchen keine Kraft, so lautet die Bewegungsgleichung nach dem zweiten Newtonschen Gesetz

$$\vec{a} = 0,$$

also

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t) = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Lösung durch

$$\vec{x}(t) = \vec{v}t + \vec{x}_0$$

gegeben ist. Hierbei sind \vec{v} und \vec{x}_0 Integrationskonstanten. Wir sehen, daß die Lösung gerade eine Bewegung entlang einer geraden Linie mit konstanter Geschwindigkeit beschreibt, im Einklang mit dem ersten Newtonschen Gesetz.

- Wir haben gesehen, daß die Bahn eines freien Teilchens vollständig durch die Bewegungsgleichung und der beiden Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$) festgelegt ist. Dies gilt allgemein: In einem System mit N Teilchen sind – unter relativ schwachen Voraussetzungen – die Bahnen aller Teilchen durch die Bewegungsgleichungen und die Anfangsbedingungen (Ort und Geschwindigkeit eines jeden Teilchens zum Zeitpunkt $t = t_0$) festgelegt. Man spricht von einer **deterministischen Theorie**. Wir werden dies im Rahmen der N -Teilchensysteme noch genauer diskutieren.

2.5 Kräfte

Wir haben bereits gesehen, daß die Gravitationskraft zwischen zwei Teilchen der Massen m_i und m_j durch

$$\vec{F}_{ij} = Gm_i m_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}$$

gegeben ist. Sind die Teilchen zusätzlich elektrisch geladen, so treten zusätzlich zur Gravitationskraft noch elektromagnetische Kräfte auf, die anziehend oder abstossend sein können. Es empfiehlt sich daher, die Kräfte zwischen zwei Teilchen etwas abstrakter zu diskutieren. Im folgenden wollen wir Zentralkräfte und konservative Kräfte genauer studieren.

2.5.1 Zentralkräfte

Das Newtonsche Gravitationsgesetz beschreibt die Kraft auf ein Teilchen mit der Masse m , welches sich im Kraftfeld eines Teilchens der Masse M zu:

$$\vec{F} = -GmM \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\frac{GmM}{|\vec{x}|^2} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Hierbei haben wir das Koordinatensystem so gewählt, so daß sich das Teilchen mit der Masse M am Ursprung befindet. Man spricht hier von einer **Zentralkraft**. Unter einer Zentralkraft versteht man eine Kraft, die immer auf einen Punkt oder von ihm weg gerichtet ist. Wählt man diesen Punkt als Ursprung des Koordinatensystems, so ist eine Zentralkraft von der Form

$$\vec{F} = f(r)\hat{x},$$

wobei $r = |\vec{x}|$ und \hat{x} der Einheitsvektor in Richtung von \vec{x} ist. Für das Newtonsche Gravitationsgesetz ist

$$f(r) = -\frac{GmM}{r^2}.$$

Für Zentralkräfte gibt es immer eine Funktion $V(r)$, so daß

$$F_x = -\frac{\partial}{\partial x}V(|\vec{x}|), \quad F_y = -\frac{\partial}{\partial y}V(|\vec{x}|), \quad F_z = -\frac{\partial}{\partial z}V(|\vec{x}|).$$

Beweis: Wir setzen

$$V(r) - V(r_0) = -\int_{r_0}^r f(r') dr',$$

wobei r_0 ein beliebiger Bezugswert und $V(r_0)$ eine Konstante ist. Wir haben nun:

$$\frac{\partial}{\partial x}V(r) = -f(r)\frac{\partial r}{\partial x} = -f(r)\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = -f(r)\frac{x}{r}.$$

Gleiches gilt für die Ableitungen nach y und z . Wir bezeichnen die Funktion V als **Potential**. Eine additive Konstante ist für die Bestimmung der Kraft aus dem Potential irrelevant. Für das Newtonsche Gravitationsgesetz lautet das Potential

$$V(r) = -\int \left(-\frac{GmM}{r^2}\right) dr = -\frac{GmM}{r}.$$

Bemerkung: Für Zentralkräfte haben wir die Beziehung

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}V(r) \\ \frac{\partial}{\partial y}V(r) \\ \frac{\partial}{\partial z}V(r) \end{pmatrix}.$$

Führen wir nun den **Nabla-Operator**

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

ein, so läßt sich diese Gleichung auch wie folgt schreiben:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r).$$

Bemerkung: $\vec{\nabla}$ ist ein Operator, der auf eine Größe, wie zum Beispiel eine Funktion, die abgeleitet werden kann, wirkt. Man sollte diese Größe daher immer mitangeben. Mathematische

Beziehungen, in denen die Größe auf die ein Operator wirkt fehlt, machen nur Sinn, wenn sie für alle möglichen Größen des Problems (wie zum Beispiel für alle Testfunktionen) gelten.

Ist $f(x, y, z)$ eine skalare Funktion der Variablen x , y und z , so bezeichnet man $\vec{\nabla}f$ als Gradienten der Funktion f . Man schreibt auch

$$\text{grad } f = \vec{\nabla}f.$$

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m in einem Zentralpotential $V(r)$. Die Kraft auf das Teilchen ist $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$ und parallel zu \vec{x} . Der Drehimpuls des Teilchens ist gegeben durch

$$\vec{L} = m\vec{x} \times \dot{\vec{x}}.$$

Für die zeitliche Änderung des Drehimpuls erhält man

$$\dot{\vec{L}} = m\dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + m\vec{x} \times \ddot{\vec{x}} = m\vec{x} \times \ddot{\vec{x}} = \vec{x} \times \vec{F} = -\vec{x} \times \vec{\nabla}V = 0.$$

Wir erhalten somit die wichtige Aussage, daß für ein Teilchen, daß sich in einem Zentralpotential befindet, der Drehimpuls erhalten ist.

2.5.2 Konservative Kräfte

Wir haben bereits gesehen, daß sich eine Zentralkraft immer als der (negative) Gradient eines Potentials schreiben läßt. Wir interessieren uns nun ganz allgemein für alle Kräfte, die sich in dieser Form ausdrücken lassen.

Definition: Unter einer **konservativen Kraft** versteht man eine Kraft, welche sich als der negative Gradient eines zeitunabhängigen Potentials $V(\vec{x})$ schreiben läßt:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{x}).$$

Für konservative Kräfte gilt, dass die Arbeit die entlang eines Weges von \vec{x}_0 nach \vec{x} geleistet wird, nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, aber vom Weg unabhängig ist

$$\int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -[V(\vec{x}) - V(\vec{x}_0)].$$

Für einen geschlossenen Weg γ gilt somit:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Es gilt auch die Umkehrung: Hängt das Wegintegral nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, aber nicht vom Weg, so läßt sich die Kraft als (negativer) Gradient eines Potentials schreiben.

Wir bemerken noch, daß für das Vorliegen eines konservativen Kraftfeldes es zu fordern genügt, daß das Wegintegral über jeden geschlossenen Weg verschwindet.

Mit Hilfe des Satzes von Stoke läßt sich diese Aussage wie folgt umformulieren:

$$0 = \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} d\sigma,$$

wobei A die von γ umschlossene Fläche, $d\sigma$ ein infinitessimales Flächenelement und \hat{n} den Normalenvektor zu diesem Flächenelement beschreibt. Weiter gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y \\ \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x \end{pmatrix}.$$

Diese Größe bezeichnet man auch als **Rotation** von \vec{F} :

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}.$$

Da die obige Gleichung für beliebige geschlossene Kurven und somit beliebige umschlossenen Flächen A gilt, gilt sie auch im Infinitesimalen. Daher folgt das der Integrand des Integrals über A verschwinden muß. Wir erhalten somit die folgende Aussage: Ein Kraftfeld ist genau dann konservativ, falls

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

gilt, d.h

$$\frac{\partial}{\partial y} F_z - \frac{\partial}{\partial z} F_y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} F_x - \frac{\partial}{\partial x} F_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x = 0.$$

2.6 Allgemeine Aussagen über N -Teilchensysteme

Wir betrachten nun ein System von n Teilchen an den Orten $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ mit den Massen m_1, m_2, \dots, m_n . Die inneren Kräfte, die von Teilchen j auf Teilchen i wirken, bezeichnen wir mit \vec{F}_{ij} , eventuell auftretende äußere Kräfte, welche auf Teilchen i wirken, bezeichnen wir mit K_i .

Für die Gesamtmasse des Systems führen wir die Bezeichnung

$$M = \sum_{i=1}^n m_i$$

ein, den Schwerpunkt des Systems bezeichnen wir mit

$$\vec{X} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i.$$

Für die inneren Kräfte wollen wir annehmen, daß sie Potentialkräfte sind

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{\nabla}_i V_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|),$$

sowie daß

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

gilt. Der Index i bei $\vec{\nabla}_i$ gibt an, daß die Ableitungen nach den Komponenten von \vec{x}_i erfolgen. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{1n} + \vec{K}_1, \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{2n} + \vec{K}_2, \\ &\dots \\ m_n \ddot{\vec{x}}_n &= \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \dots + \vec{F}_{n(n-1)} + \vec{K}_n. \end{aligned}$$

Etwas kompakter läßt sich die Kraft auf das i -te Teilchen schreiben als

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{K}_i.$$

2.6.1 Erhaltungsgrößen

Schwerpunktsatz: Für den Schwerpunkt gilt:

$$M \ddot{\vec{X}} = \sum_{i=1}^n \vec{K}_i.$$

Der Beweis ergibt sich durch Aufsummation der einzelnen Bewegungsgleichungen unter der Ausnutzung von $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{x}}_i &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{K}_i \right), \\ M \ddot{\vec{X}} &= \sum_{i=1}^n \vec{K}_i. \end{aligned}$$

Drehimpulssatz: Die zeitliche Änderung des gesamten Drehimpulses ist gleich dem Drehmoment der äußeren Kräfte:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \times \vec{K}_i,$$

wobei der Gesamtdrehimpuls \vec{L} durch

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i)$$

gegeben ist. Dies zeigt man wie folgt:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{x}}_i \times \dot{\vec{x}}_i) + \sum_{i=1}^n m_i (\vec{x}_i \times \ddot{\vec{x}}_i) = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{x}_i \times \ddot{\vec{x}}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{K}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \times \vec{K}_i.$$

Energiesatz: Die zeitliche Änderung der gesamten inneren Energie ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte:

$$\frac{d}{dt}(T+U) = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \cdot \vec{K}_i,$$

wobei

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2,$$

$$U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|).$$

Beweis: Wir verwenden die Annahme, daß die inneren Kräfte Potentialkräfte sind. Somit lautet die i -te Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = - \sum_{j \neq i} \vec{\nabla}_i V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) + \vec{K}_i.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\dot{\vec{x}}_i$, so erhält man

$$m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i = - \sum_{j \neq i} \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) + \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{K}_i.$$

Die linke Seite ist nichts anderes als

$$m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2.$$

Summiert man alle Gleichungen auf, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \right) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) + \sum_{i=1}^n \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{K}_i.$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite ergibt sich

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) &= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \dot{\vec{x}}_j \cdot \vec{\nabla}_j V_{ji} (|\vec{x}_j - \vec{x}_i|) \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left(\dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i + \dot{\vec{x}}_j \cdot \vec{\nabla}_j \right) V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \frac{d}{dt} V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|).$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} V_{ij} (|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \right) + \sum_{i=1}^n \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{K}_i, \\ \frac{d}{dt} (T + U) &= \sum_{i=1}^n \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{K}_i. \end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen.

Wir betrachten nun den Spezialfall eines abgeschlossenen Systems. In diesem Fall verschwinden per Definition alle äußeren Kräfte:

$$\vec{K}_i = 0.$$

Aus dem Schwerpunktsatz

$$M \ddot{\vec{X}} = \vec{0}$$

folgt

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{x}}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{x}}_i.$$

Bezeichnen wir mit

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{x}}_i.$$

den Gesamtimpuls, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \vec{P} = \vec{0}.$$

Für die Bewegung des Schwerpunktes folgt aus $\ddot{\vec{X}} = \vec{0}$, daß sich der Schwerpunkt mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden Linie bewegt. Ausgedrückt durch den Impuls erhält man für die Bewegung des Schwerpunktes

$$\vec{X}(t) = \frac{1}{M} \vec{P} t + \vec{X}(t_0),$$

wobei $\vec{X}(t_0)$ die Integrationskonstante aus der Integration der Bewegungsgleichung ist. Der Drehimpulssatz vereinfacht sich für ein abgeschlossenes System zu

$$\dot{\vec{L}} = 0.$$

Der Energiesatz vereinfacht sich für ein abgeschlossenes System zu

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0.$$

Wir setzen

$$E = T + U.$$

Wir können zusammenfassend sagen, daß ein abgeschlossenes System durch zehn Größen

$$\vec{L}, \vec{P}, E, \vec{X}(t_0)$$

charakterisiert ist. Diese zehn Größen bezeichnet man als die klassischen zehn **Bewegungsintegrale** oder die klassischen zehn **Erhaltungsgrößen**.

2.6.2 Das Virialtheorem

Wir betrachten ein abgeschlossenes System von n Teilchen. Wir nehmen an, daß die Kräfte zwischen den Teilchen durch ein Potential beschrieben werden können und daß die Kräfte nicht explizit von der Zeit abhängen:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

Wir definieren die Größe

$$G(t) = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i(t) \cdot \vec{p}_i(t),$$

die man als **Virial** bezeichnet. Für die zeitliche Ableitung von $G(t)$ findet man

$$\frac{d}{dt}G(t) = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{x}}_i(t) \cdot \vec{p}_i(t) + \sum_{i=1}^n \vec{x}_i(t) \cdot \dot{\vec{p}}_i(t) = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{x}}_i(t))^2 - \sum_{i=1}^n \vec{x}_i(t) \cdot \vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

Zu einer Funktion $f(t)$ definieren wir den zeitlichen Mittelwert

$$\langle f \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt.$$

Angewandt auf die zeitliche Ableitung des Virials erhalten wir

$$\langle \dot{G} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \frac{dG(t)}{dt} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{G(T) - G(-T)}{2T}.$$

Sind die Kräfte so beschaffen, daß kein Teilchen gegen Unendlich entweicht und kein Teilchen zu keinem Zeitpunkt einen unendlich großen Impuls besitzt, so sind die Werte, die das Virial annehmen kann, beschränkt. In diesem Fall gilt

$$\langle \dot{G} \rangle = 0.$$

Dann folgt

$$\sum_{i=1}^n m_i \langle (\dot{\vec{x}}_i(t))^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}_i(t) \cdot \vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \rangle,$$

und somit

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle \vec{x}_i(t) \cdot \vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \rangle.$$

Dies ist das **Virialtheorem**. Man nennt die Funktion $V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ **homogen vom Grade k** falls

$$V(\lambda \vec{x}_1, \dots, \lambda \vec{x}_n) = \lambda^k V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

gilt. Ist das Potential eine homogene Funktion vom Grade k in den Argumenten $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, so läßt sich zeigen, daß

$$\sum_{i=1}^n \vec{x}_i(t) \cdot \vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = k V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$$

gilt. Somit vereinfacht sich der Virialsatz in diesem Fall zu

$$\langle T \rangle = \frac{k}{2} \langle U \rangle.$$

Kombiniert man dies mit dem Energieerhaltungssatz

$$\langle T \rangle + \langle U \rangle = E,$$

so ergibt sich

$$\langle T \rangle = \frac{k}{k+2} E, \quad \langle U \rangle = \frac{2}{k+2} E.$$

Für $k = 2$ erhält man zum Beispiel

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} E, \quad \langle U \rangle = \frac{1}{2} E,$$

während man für $k = -1$

$$\langle T \rangle = -E, \quad \langle U \rangle = 2E$$

erhält.

2.6.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen

Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen noch etwas genauer diskutieren. Wir betrachten ein System mit n Teilchen. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{K}_i.$$

Dies ist ein System von $(3n)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den Größen

$$x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t.$$

Wir führen dieses System in ein System von $(6n)$ Differentialgleichungen erster Ordnung über, indem wir die Impulse

$$\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$$

eingeführen. Wir erhalten somit das System

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_i &= \frac{1}{m_i} \vec{p}_i, \\ \dot{\vec{p}}_i &= \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{K}_i. \end{aligned}$$

Dies ist ein System von $(6n)$ Differentialgleichungen in den Größen

$$x_1, y_1, z_1, p_1^x, p_1^y, p_1^z, \dots, x_n, y_n, z_n, p_n^x, p_n^y, p_n^z, t.$$

Führen wir den Vektor

$$\vec{y} = (x_1, y_1, z_1, p_1^x, p_1^y, p_1^z, \dots, x_n, y_n, z_n, p_n^x, p_n^y, p_n^z)^T,$$

ein, so läßt sich dieses System auf die Form

$$\frac{d}{dt} \vec{y} = \vec{G}(t, \vec{y})$$

bringen. Dies ist die Standardform eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen folgt nun aus der Theorie der Differentialgleichungen: Ist \vec{G} stetig in t und \vec{y} und genügt \vec{G} einer Lipschitz-Bedingung, so gibt es eine eindeutige Lösung dieser Differentialgleichung zu vorgegebenen Anfangswerten.

Bemerkung: Ist \vec{G} in den Variablen $\vec{y} = (x_1, \dots, p_n^z)$ stetig partiell differenzierbar, so erfüllt \vec{G} eine Lipschitz-Bedingung. Somit gilt: Ist $\vec{G}(t, \vec{y})$ in der Variablen t stetig und in den Variablen $\vec{y} = (x_1, \dots, p_n^z)$ stetig partiell differenzierbar, dann gibt es eine eindeutige Lösung der Bewegungsgleichungen zu den Anfangswerten $\vec{x}_i(t_0)$ und $\vec{p}_i(t_0)$.

Bemerkung: Wir bezeichnen den Raum aller Koordinaten

$$\vec{y} = (x_1, y_1, z_1, p_1^x, p_1^y, p_1^z, \dots, x_n, y_n, z_n, p_n^x, p_n^y, p_n^z)^T,$$

als den **Phasenraum** eines Systems von n Teilchen. Dieser Phasenraum hat die Dimension $(6n)$.

2.7 Der harmonische Oszillator*

Der harmonische Oszillator ist ein Beispiel für ein physikalisches System mit einer Bewegung in einer Dimension. Bei einem harmonischen Oszillator ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung. Die Kraft ist gegeben durch

$$\vec{F} = -m\omega_0^2\vec{x}.$$

Hier haben wir das Koordinatensystem schon so gewählt, daß $x = 0$ die Ruhelage darstellt. Da wir ein ein-dimensionales System betrachten, ist $\vec{x} \in \mathbb{R}^1$. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem weder Reibung noch eine äußere Kraft vorliegt. Aus der Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

erhalten wir

$$\ddot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Ein Lösungsfundamentalsystem ist gegeben durch die Funktionen

$$e^{i\omega_0 t}, \quad e^{-i\omega_0 t},$$

so daß die allgemeine Lösung lautet

$$\vec{x}(t) = \vec{c}_1 e^{i\omega_0 t} + \vec{c}_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Sucht man die Lösungen zu den Anfangsbedingungen $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ und $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\vec{c}_1 + \vec{c}_2 &= \vec{x}_0, \\ i\omega_0\vec{c}_1 - i\omega_0\vec{c}_2 &= \vec{v}_0.\end{aligned}$$

Als Lösung findet man

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{2} \left(\vec{x}_0 - \frac{i}{\omega_0} \vec{v}_0 \right), \quad \vec{c}_2 = \frac{1}{2} \left(\vec{x}_0 + \frac{i}{\omega_0} \vec{v}_0 \right).$$

Somit hat man die Lösung zur gewünschten Anfangsbedingung:

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \left(\vec{x}_0 - \frac{i}{\omega_0} \vec{v}_0 \right) e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2} \left(\vec{x}_0 + \frac{i}{\omega_0} \vec{v}_0 \right) e^{-i\omega_0 t}.$$

Bemerkung: Auch wenn in der rechten Seite explizit imaginäre Ausdrücke auftreten, so ist die Lösung doch rein reell, d.h. alle Imaginärteile heben sich weg. Dies sieht man durch die Ersetzung

$$e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t), \quad e^{-i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - i \sin(\omega_0 t).$$

Man erhält

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

Die rücktreibende Kraft läßt sich als der negative Gradient einer Potentialfunktion darstellen. Mit

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$$

findet man für $V(\vec{x})$:

$$V(\vec{x}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2\vec{x}^2.$$

Diese Größe entspricht der potentiellen Energie U des harmonischen Oszillators. Die Potentialfunktion ist homogen vom Grad 2:

$$V(\lambda\vec{x}) = \lambda^2V(\vec{x}).$$

Somit ergibt sich aus dem Virialtheorem:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2}E, \quad \langle U \rangle = \frac{1}{2}E.$$

Wir betrachten noch den harmonischen Oszillator mit Reibung. Wir nehmen an, daß die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit ist:

$$\vec{F}_{\text{friction}} = -2\mu m\dot{\vec{x}}, \quad \mu > 0.$$

Die Reibungskraft bremst die Bewegung, daher das Minuszeichen. Berücksichtigt man die Reibungskraft, so liegt **kein** konservatives System mehr vor. Die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator mit Reibung lautet:

$$\ddot{\vec{x}} + 2\mu\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x} = 0.$$

Dies ist wieder eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zur Lösung betrachten wir die Fälle $\mu^2 < \omega_0^2$, $\mu^2 = \omega_0^2$ und $\mu^2 > \omega_0^2$ getrennt.

1. Fall: $\mu^2 < \omega_0^2$. Dieser Fall beschreibt eine kleine Dämpfung. Ein Lösungsfundamentalsystem ist gegeben durch

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t} e^{i\omega t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-\mu t} e^{-i\omega t}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}.$$

Die Lösung zu den Anfangsbedingungen $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ und $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$ ist gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \left(\vec{x}_0 - \frac{i}{\omega} (\vec{v}_0 + \mu\vec{x}_0) \right) e^{-\mu t} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \left(\vec{x}_0 + \frac{i}{\omega} (\vec{v}_0 + \mu\vec{x}_0) \right) e^{-\mu t} e^{-i\omega t}$$

$$= \vec{x}_0 e^{-\mu t} \cos(\omega t) + \frac{\vec{v}_0 + \mu \vec{x}_0}{\omega} e^{-\mu t} \sin(\omega t).$$

2. Fall: $\mu^2 = \omega_0^2$. In diesem Fall lautet das Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t}, \quad \varphi_2(t) = t e^{-\mu t}.$$

Die Lösung zu den Anfangsbedingungen $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ und $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$ ist gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{-\mu t} + (\vec{v}_0 + \mu \vec{x}_0) t e^{-\mu t}.$$

Den Fall $\mu^2 = \omega_0^2$ bezeichnet man als aperiodischen Grenzfall.

3. Fall: $\mu^2 > \omega_0^2$. In diesem Fall lautet das Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu_1 t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-\mu_2 t}, \quad \mu_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}, \quad \mu_2 = \mu - \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}.$$

Die Lösung zu den Anfangsbedingungen $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ und $\dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$ ist gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{2} \left(\vec{x}_0 - \frac{\vec{v}_0 + \mu \vec{x}_0}{\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\mu_1 t} + \frac{1}{2} \left(\vec{x}_0 + \frac{\vec{v}_0 + \mu \vec{x}_0}{\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}} \right) e^{-\mu_2 t}.$$

Den Fall $\mu^2 > \omega_0^2$ bezeichnet man als Kriechfall.

Zu guter Letzt betrachten wir noch den Fall, daß auf den harmonischen Oszillator eine periodische äußere Kraft der Form

$$\vec{K} = m \vec{A} \cos(\omega_{ext} t)$$

wirkt. In diesem Fall handelt es sich um **kein** abgeschlossenes System mehr. Wir behandeln nur den Fall einer schwachen Dämpfung: $\mu^2 < \omega_0^2$. Es empfiehlt sich über den komplexen Zahlen zu arbeiten und die äußere Kraft als den Realteil einer komplexwertigen Funktion zu betrachten:

$$\vec{K} = \operatorname{Re} \left(m \vec{A} e^{i\omega_{ext} t} \right).$$

Dies führt uns auf die Differentialgleichung

$$\ddot{\vec{x}} + 2\mu \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = \vec{A} e^{i\omega_{ext} t}.$$

Wir können annehmen, daß ω_{ext} reell und positiv ist. Wie bereits oben gezeigt, ist das Fundamentalsystem der homogenen Gleichung gegeben durch

$$\varphi_1(t) = e^{-\mu t} e^{i\omega t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-\mu t} e^{-i\omega t}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Im ersten Fall ist $\mu > 0$ oder $\omega_{ext} \neq \omega$. Im zweiten Fall ist $\mu = 0$ und $\omega_{ext} = \omega$. Beginnen wir mit dem ersten Fall. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet

$$\vec{x}(t) = \operatorname{Re} \left[\vec{A} \frac{\omega_0^2 - \omega_{ext}^2 - 2i\mu\omega_{ext}}{(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 + 4\mu^2\omega_{ext}^2} e^{i\omega_{ext}t} + \vec{c}_1 e^{-\mu t} e^{i\omega t} + \vec{c}_2 e^{-\mu t} e^{-i\omega t} \right].$$

Die Konstanten \vec{c}_1 und \vec{c}_2 bestimmt man so, daß die Anfangsbedingungen

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$$

erfüllt sind. Im Fall $\mu > 0$ gilt für große Zeiten

$$\vec{x}(t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\vec{A}}{(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2)^2 + 4\mu^2\omega_{ext}^2} \left[(\omega_0^2 - \omega_{ext}^2) \cos(\omega_{ext}t) + 2\mu\omega_{ext} \sin(\omega_{ext}t) \right].$$

Es bleibt noch der Spezialfall $\mu = 0$ und $\omega = \omega_0 = \omega_{ext}$ zu diskutieren. Man bezeichnet diesen Fall als Resonanzfall. Die allgemeine Lösung im Resonanzfall ist gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \operatorname{Re} \left[-\frac{i}{2\omega} \vec{A} t e^{i\omega t} + \vec{c}_1 e^{i\omega t} + \vec{c}_2 e^{-i\omega t} \right].$$

Die Konstanten \vec{c}_1 und \vec{c}_2 bestimmt man wieder aus den Anfangsbedingungen. Die Amplitude des ersten Terms wächst linear mit t an:

$$\vec{x}(t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2\omega} \vec{A} t \sin(\omega t).$$

2.8 Das Zweikörperproblem

Wir betrachten nun das Zweikörperproblem: Hierunter versteht man ein abgeschlossenes System bestehend aus zwei Teilchen, die sich gegenseitig anziehen (oder abstoßen). Äußere Kräfte liegen nicht vor. Wir haben also die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{x}}_1 &= \vec{F}_{12}, \\ m_2 \ddot{\vec{x}}_2 &= \vec{F}_{21}, \end{aligned}$$

wobei nach dem dritten Newtonschen Gesetz $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ist. Es empfiehlt sich anstelle der Ortsvektoren \vec{x}_1 und \vec{x}_2 den relativen Abstand

$$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$$

und den Ortsvektor des Schwerpunktes

$$\vec{X} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \vec{x}_1 + m_2 \vec{x}_2)$$

zu betrachten. Wir können \vec{x}_1 und \vec{x}_2 durch \vec{x} und \vec{X} ausdrücken:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{X} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x}, \\ \vec{x}_2 &= \vec{X} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{x}.\end{aligned}$$

Schreiben wir die Bewegungsgleichungen auf die Variablen \vec{x} und \vec{X} um, so ergibt sich zunächst durch Addition der beiden Gleichungen

$$\ddot{\vec{X}} = \vec{0}.$$

Hier haben wir $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ ausgenutzt. Der Schwerpunkt bewegt sich also geradlinig gleichförmig. Diesen Sachverhalt haben wir zuvor schon durch die allgemeine Betrachtung von n -Teilchensystemen ohne äußere Kräfte hergeleitet. Interessanter ist die Bewegungsgleichung für die Relativbewegung \vec{x} :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{x}} = \vec{F}_{12}.$$

Man bezeichnet

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

als **reduzierte Masse**. Setzt man noch $\vec{F} = \vec{F}_{12}$ so erhält man die Bewegungsgleichung der Relativbewegung:

$$\mu \ddot{\vec{x}} = \vec{F}.$$

Dies entspricht der Bewegungsgleichung **eines** Teilchens in einem äußeren Kraftfeld \vec{F} . Wir haben durch die geschickte Aufspaltung der Koordinaten in Schwerpunktskoordinaten und Relativkoordinaten erreicht, daß die Bewegungsgleichungen entkoppeln: Der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig gleichförmig, die Relativbewegung entspricht der Bewegung eines Teilchens in einem äußeren Kraftfeld. Man sagt daher auch, daß das Zweikörperproblem auf ein Einteilchenproblem in einem äußeren Feld reduziert werden kann.

\vec{F} ist die Kraft, die durch das Teilchen 2 auf das Teilchen 1 wirkt. Bezüglich der Relativkoordinaten \vec{x} ist diese Kraft (anti)-parallel zu \vec{x} gerichtet, es handelt sich also um eine Zentralkraft. Wir können daher

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

schreiben. Für Zentralkräfte ist der Drehimpuls

$$\vec{l} = \mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}}$$

erhalten, da

$$\frac{d}{dt} \vec{l} = \mu \dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{x}} + \mu \vec{x} \times \ddot{\vec{x}} = 0 + 0 = 0.$$

(Wir haben hier ein kleines \vec{l} gewählt, da sich der Drehimpuls in diesem Fall auf die Relativkoordinaten \vec{x} bezieht.) Die Bewegung erfolgt also in einer Ebene senkrecht zu \vec{l} . Wir können das Koordinatensystem so wählen, so daß für $\vec{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$z(t) = 0$$

für alle Zeiten t gilt. Für die x - und y -Koordinate führen wir die Parametrisierung

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos \varphi(t), \\ y(t) &= r(t) \sin \varphi(t). \end{aligned}$$

Als erstes stellen wir fest, daß

$$\dot{\vec{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}^2 &= \left[\frac{d}{dt} (r(t) \cos \varphi(t)) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (r(t) \sin \varphi(t)) \right]^2 \\ &= (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Als nächstes stellen wir fest, daß für die kinetische Energie gilt (mit $M = m_1 + m_2$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{\vec{X}} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{\vec{X}} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{x}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{x}}^2. \end{aligned}$$

Wir haben ein abgeschlossenes System, daher ist die Gesamtenergie erhalten:

$$\begin{aligned} T + V &= \text{const}, \\ \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{x}}^2 + V &= \text{const}. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 = \frac{\vec{P}^2}{2M},$$

wobei \vec{P} der Gesamtimpuls ist. In einem abgeschlossenen System ist aber auch der Gesamtimpuls erhalten, und somit auch die kinetische Energie des Schwerpunktes. Somit folgt:

$$\frac{1}{2} \mu \dot{\vec{x}}^2 + V(r) = \text{const},$$

bzw.

$$\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const},$$

Wie bereits erwähnt, ist auch der Drehimpuls \vec{l} erhalten. Der Drehimpuls ist gegeben durch

$$\begin{aligned} l_x &= 0, & l_y &= 0, \\ l_z &= \mu r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi) - \mu r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi) = \mu r^2 \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Setzen wir $l_z = l$ so haben wir also

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}.$$

Setzen wir dies in den Energieerhaltungssatz ein, so erhalten wir

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{const},$$

Der Term $l^2/(2\mu r^2)$ hängt nur von r , aber nicht von \dot{r} oder $\dot{\varphi}$ ab. Da $V(r)$ ebenfalls nur von r abhängt, können wir ein neues “**effektives**” Potential definieren:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}.$$

Somit können wir schreiben

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = E,$$

wobei wir die Gesamtenergie der Relativbewegung gleich E gesetzt haben. Für $r(t)$ erhalten wir also die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}r(t) = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{\text{eff}}(r))}.$$

Diese Differentialgleichung hängt nur von $r(t)$, aber nicht von $\varphi(t)$ ab. Wir haben also das Problem auf eine Differentialgleichung erster Ordnung in einer Variablen reduziert. Hat man $r(t)$ durch Lösen dieser Differentialgleichung bestimmt, so ergibt sich $\varphi(t)$ durch Lösen der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{l}{\mu r(t)^2}.$$

Wir können auch die beiden Differentialgleichungen miteinander kombinieren und betrachten hierzu zunächst $dr/d\varphi$:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} = \frac{r^2}{l} \sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}}(r))}.$$

Durch Integration erhalten wir

$$\varphi - \varphi_0 = l \int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}}(r))}}.$$

Wir spezifizieren nun das Potential und betrachten das Newtonsche Gravitationsgesetz. Somit gilt für das effektive Potential

$$V_{\text{eff}} = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2}.$$

Wir möchten die Gleichung

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 &= \frac{r^4}{l^2} \cdot 2\mu \left(E + G \frac{m_1 m_2}{r} - \frac{l^2}{2\mu r^2}\right) \\ &= \frac{2\mu E}{l^2} r^4 + \frac{2\mu G m_1 m_2}{l^2} r^3 - r^2 \end{aligned}$$

lösen. Hier ist es einfacher, zunächst die Funktion

$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}, \quad \frac{d\sigma}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}$$

zu betrachten:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu G m_1 m_2}{l^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} = \frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu G m_1 m_2}{l^2} \sigma - \sigma^2.$$

Führt man noch die Hilfsgrößen

$$r_0 = \frac{l^2}{G m_1 m_2 \mu}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{G^2 m_1^2 m_2^2 \mu}} = \sqrt{1 + \frac{2E\mu r_0^2}{l^2}}$$

ein, wobei r_0 die Dimension einer Länge hat und ε dimensionslos ist, so erhält man

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2 - 1}{r_0^2} + \frac{2}{r_0 r} - \frac{1}{r^2} = \frac{\varepsilon^2 - 1}{r_0^2} + \frac{2\sigma}{r_0} - \sigma^2.$$

Wir schreiben diese Gleichung noch um:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \left(\sigma - \frac{1}{r_0}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{r_0^2}.$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$\sigma(\varphi) = \frac{1}{r_0} + \frac{\varepsilon}{r_0} \cos(\varphi - \varphi_0),$$

wie man leicht durch Differenzieren überprüft:

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon}{r_0} \sin(\varphi - \varphi_0).$$

φ_0 ist eine Integrationskonstante. Somit ergibt sich für $r(\varphi)$:

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sigma(\varphi)} = \frac{r_0}{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Diese Gleichung wollen wir etwas genauer betrachten. Wählen wir unser Koordinatensystem so, daß $\varphi_0 = 0$ ist, so läßt sich diese Gleichung mit Hilfe von

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}$$

wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} r + \varepsilon x &= r_0, \\ x^2 + y^2 &= (r_0 - \varepsilon x)^2, \\ (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2\varepsilon r_0 x + y^2 &= r_0^2. \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\varepsilon^2 < 1$. Quadratische Ergänzung führt uns auf

$$\left(x + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} r_0\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{r_0^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}.$$

Setzt man

$$x_0 = -\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} r_0, \quad a = \frac{r_0}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

so erhält man

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Ellipse mit den Halbachsen a und b .

Betrachten wir dagegen den Fall $\varepsilon^2 > 1$, so erhalten wir mit

$$a = \frac{r_0}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{r_0}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}},$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Hyperbel.

Es bleibt noch der Fall $\epsilon^2 = 1$. In diesem Fall haben wir

$$2\epsilon r_0 x + y^2 = r_0^2.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Parabel.

Wir erinnern uns an die Definition von ϵ :

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2El^2}{G^2 m_1^2 m_2^2 \mu}.$$

Somit können wir zusammenfassen:

- Ist die Gesamtenergie der Relativbewegung $E < 0$, so ist die Bahn eine Ellipse.
- Ist $E = 0$, so ist die Bahn eine Parabel.
- Ist $E > 0$, so ist die Bahn eine Hyperbel.

Im ersten Fall spricht man von einer gebundenen Bahn, in den anderen beiden Fällen von einer ungebundenen Bahn.

2.8.1 Die Keplerschen Gesetze

Wir gehen nun näher auf die gebundenen Bahnen ein und betrachten insbesondere die Planetenbahnen im Sonnensystem. Hierbei wollen wir die Kräfte der anderen Planeten auf einen Planeten vernachlässigen, so daß wir ein Zweikörpersystem Sonne-Planet haben. Da wir an gebundenen Bahnen interessiert sind, folgt unmittelbar das erste Keplersche Gesetz:

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen.

Bewegt sich der Planet von \vec{x} nach $\vec{x} + d\vec{x}$, so überstreicht der Ortsvektor die Fläche

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{x} \times d\vec{x}|.$$

Pro Zeiteinheit haben wir also

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{x} \times \dot{\vec{x}}|.$$

Nun ist allerdings $\vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \vec{l}/\mu$ und da der Drehimpuls erhalten ist, folgt

$$\frac{dA}{dt} = \text{const.}$$

Wir haben somit das zweite Keplersche Gesetz:

Der Ortsvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Die Fläche einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist $A = \pi ab$. Diese Fläche wird in der vollen Umlaufzeit T überstrichen. Es gilt also

$$\frac{A}{T} = \frac{l}{2\mu}.$$

Sei a die große Halbachse und b die kleinere. Es gilt

$$b = \sqrt{ar_0}.$$

Somit

$$\begin{aligned} \frac{\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{r_0}}{T} &= \frac{l}{2\mu}, \\ \frac{a^3}{T^2} &= \frac{l^2}{4\pi^2 r_0 \mu^2} = \frac{Gm_1 m_2}{4\pi^2 \mu} = \frac{1}{4\pi^2} G(m_1 + m_2). \end{aligned}$$

Kann man die Massen der Planeten gegenüber der Sonnenmasse vernachlässigen, so ergibt sich

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_{\odot}}{4\pi^2},$$

wobei M_{\odot} die Sonnenmasse bezeichnet. Die rechte Seite hängt nicht mehr von der Planetenmasse ab. Man erhält das dritte Keplersche Gesetz:

Das Verhältnis der Kuben der großen Halbachsen zu den Quadraten der Umlaufzeiten ist für alle Planeten in einem gegebenen Sonnensystem dasselbe.

2.9 Streuung von Teilchen*

Wir wollen nun die ungebundenen Bahnen in einem Zweikörpersystem unter einem anderen Aspekt genauer betrachten: In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Streuung eines Teilchens im Kraftfeld eines zweiten Teilchens.

Wir betrachten zwei Teilchen der Masse m_1 und m_2 , die über eine Zentralkraft mit Potential $V(r)$ miteinander wechselwirken. Wir wollen annehmen, daß $V(r)$ mindestens wie $1/r$ für $r \rightarrow \infty$ abfällt.

Die typische experimentelle Situation besteht darin, daß man Teilchen 1 aus großer Entfernung mit einem genau definierten Impuls auf Teilchen 2 schießt, welches vor dem Stoß ruht. Man bezeichnet Teilchen 1 als **Projektil** und Teilchen 2 als **Target**. Mit Hilfe von Detektoren misst man dann die Impulse der beiden Teilchen nach dem Stoß. Somit kennt man aus den experimentell

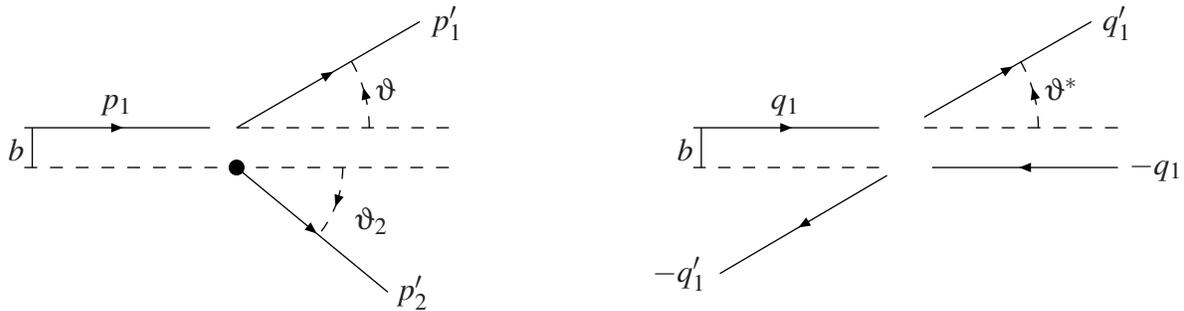


Abbildung 1: Die Streuung im Laborsystem (links) und im Schwerpunktsystem (rechts).

präparierten Anfangsbedingungen die Impulse der Teilchen lange vor der Streuung und aus den mit Hilfe der Detektoren gemessenen Impulsen die Impulse der Teilchen lange nach der Streuung. In Streuexperimenten versucht man aus den Kenntnissen der Anfangs- und der Endzustände Erkenntnisse über das Potential $V(r)$ zu gewinnen. Aus diesem Grund beschränkt man sich bei der Betrachtung des Potentials nicht nur auf das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r},$$

sondern betrachtet ein allgemeines Zentralkraftpotential. So kann zum Beispiel die Wechselwirkung zwischen den beiden Teilchen durch die elektromagnetische Coulombkraft dominiert sein. Haben die elektrischen Ladungen der beiden Teilchen gleiches Vorzeichen, so ist die Kraft abstoßend, andernfalls ist sie anziehend.

Wir betrachten nun zwei Koordinatensysteme: Das erste Koordinatensystem ist dadurch definiert, daß Teilchen 2 in diesem System vor dem Stoß ruht. Wir bezeichnen dieses System als **Laborsystem**. Wir bezeichnen in diesem Koordinatensystem mit

$$\vec{p}_1, \quad \vec{p}_2$$

die Impulse der Teilchen vor dem Stoß, und mit

$$\vec{p}'_1, \quad \vec{p}'_2$$

die Impulse der Teilchen nach dem Stoß. Im Laborsystem gilt also per Definition

$$\vec{p}_2 = \vec{0}.$$

Als zweites Koordinatensystem betrachten wir das **Schwerpunktsystem**. Hier bezeichnen wir mit

$$\vec{q} = \vec{q}_1$$

den Impuls des Teilchens 1 vor dem Stoß und mit

$$\vec{q}' = \vec{q}'_1$$

den Impuls des Teilchens 1 nach dem Stoß. Per Definition ruht der Schwerpunkt im Schwerpunktssystem. Daher ist der Gesamtimpuls im Schwerpunktssystem gleich Null. Somit ist der Impuls des Teilchens 2 im Schwerpunktssystem vor dem Stoß gleich $\vec{q}_2 = -\vec{q}$ und nach dem Stoß gleich $\vec{q}'_2 = -\vec{q}'$. Diese Größen sind in Abbildung 1 veranschaulicht.

Da es sich um ein Zweikörperproblem handelt, kann man wieder das Koordinatensystem so wählen, daß alle Teilchenbewegungen in der x - y -Ebene stattfinden. Dies gilt sowohl für das Laborsystem als auch für das Schwerpunktssystem. Wir bezeichnen mit ϑ den Streuwinkel des Teilchens 1 im Laborsystem. Es gilt offensichtlich

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}'_1 = |\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}'_1| \cos \vartheta.$$

Den Winkel unter dem Teilchen 2 im Laborsystem ausläuft, wollen wir mit ϑ_2 bezeichnen. Im Schwerpunktssystem bezeichnen wir den Streuwinkel des Teilchens 1 mit ϑ^* . Im Schwerpunktssystem ist der Streuwinkel des Teilchens 2 identisch mit dem des Teilchens 1.

Wir führen darüberhinaus noch den Stoßvektor \vec{b} ein (siehe Abbildung). Er gibt an, wie zentral der Stoß verläuft. Den Betrag $b = |\vec{b}|$ bezeichnet man als Stoßparameter (engl. impact parameter).

Im Laborsystem haben wir also für Zeiten lange vor der Streuung

$$\begin{aligned}\vec{x}_1(t) &= \vec{b} + \frac{\vec{p}_1}{m_1}t, & \text{für } t \rightarrow -\infty \\ \vec{x}_2(t) &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Für den Schwerpunkt gilt somit im Laborsystem

$$\vec{X}(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{b} + \frac{\vec{p}_1}{m_1 + m_2}t.$$

Da sich der Schwerpunkt konstant gleichmäßig bewegt, gilt dies für alle Zeiten. Bezeichnen wir mit $\vec{x}_1^*(t)$ und $\vec{x}_2^*(t)$ die Koordinaten im Schwerpunktssystem, so haben wir für die Transformation vom Laborsystem ins Schwerpunktssystem:

$$\vec{x}_j^*(t) = \vec{x}_j(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{b} - \frac{\vec{p}_1}{m_1 + m_2}t, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Für die Relativkoordinaten gilt offensichtlich

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t) = \vec{x}_1^*(t) - \vec{x}_2^*(t).$$

Somit ist der Relativimpuls

$$\vec{p}(t) = \mu \dot{\vec{x}}(t), \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

in beiden Koordinatensystemen gleich. Wir bezeichnen mit \vec{P} den Impuls des Schwerpunktes im Laborsystem. Im Schwerpunktsystem gilt für den Impuls des Schwerpunktes \vec{P}^* per Definition $\vec{P}^* = \vec{0}$. Aus

$$\vec{x}_1(t) = \vec{X}(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x}(t), \quad \vec{x}_2(t) = \vec{X}(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{x}(t),$$

folgt

$$\vec{p}_1(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P} + \vec{p}(t), \quad \vec{p}_2(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{P} - \vec{p}(t).$$

Im Schwerpunktsystem gilt (da $\vec{P}^* = \vec{0}$)

$$\vec{q}_1(t) = \vec{p}(t), \quad \vec{q}_2(t) = -\vec{p}(t).$$

Somit gilt

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \vec{p}(t) = \vec{q}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{p}(t) = \vec{q}'.$$

Wir möchten als erstes eine Beziehung zwischen dem Streuwinkel ϑ im Laborsystem und dem Streuwinkel ϑ^* im Schwerpunktsystem herleiten. Aus

$$\vec{p}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P} + \vec{q}, \quad \vec{0} = \vec{p}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{P} - \vec{q},$$

folgt

$$\vec{p}_1 = \vec{P}, \quad \vec{P} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{q}.$$

Nach dem Stoß gilt

$$\vec{p}'_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P} + \vec{q}' = \frac{m_1}{m_2} \vec{q} + \vec{q}', \quad \vec{p}'_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{P} - \vec{q}' = \vec{q} - \vec{q}',$$

Da wir vorausgesetzt haben, daß das Potential für große Abstände mindestens mit $1/r$ abfällt, können wir für große Zeiten vor bzw. nach der Streuung die potentielle Energie vernachlässigen. Die Gesamtenergie ist also in diesen Grenzfällen durch die kinetische Energie gegeben. Da die kinetische Energie des Schwerpunktes separat erhalten ist, folgt somit daß die kinetische Energie der Relativbewegung lange vor der Streuung gleich der kinetischen Energie lange nach der Streuung ist. Somit gilt

$$\frac{|\vec{q}|^2}{2\mu} = \frac{|\vec{q}'|^2}{2\mu}$$

und insbesondere

$$|\vec{q}|^2 = |\vec{q}'|^2.$$

Wir betrachten nun die Größe

$$2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}'_1.$$

Es ist einerseits

$$\begin{aligned} 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}'_1 &= 2\frac{m_1+m_2}{m_2}\vec{q}\left(\frac{m_1}{m_2}\vec{q}+\vec{q}'\right) = 2\frac{m_1+m_2}{m_2}|\vec{q}|^2\left(\frac{m_1}{m_2}+\frac{\vec{q}\cdot\vec{q}'}{|\vec{q}|^2}\right) \\ &= 2\frac{m_1+m_2}{m_2}|\vec{q}|^2\left(\frac{m_1}{m_2}+\cos\vartheta^*\right) \end{aligned}$$

Andererseits haben wir

$$\begin{aligned} 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}'_1 &= 2|\vec{p}_1||\vec{p}'_1|\cos\vartheta = 2\frac{m_1+m_2}{m_2}|\vec{q}|\left|\frac{m_1}{m_2}\vec{q}+\vec{q}'\right|\cos\vartheta \\ &= 2\frac{m_1+m_2}{m_2}|\vec{q}|^2\sqrt{1+2\frac{m_1}{m_2}\cos\vartheta^*+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Relation

$$\cos\vartheta = \frac{\frac{m_1}{m_2}+\cos\vartheta^*}{\sqrt{1+2\frac{m_1}{m_2}\cos\vartheta^*+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}}.$$

Durch Umformen erhält man

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\vartheta^*}{\sqrt{1+2\frac{m_1}{m_2}\cos\vartheta^*+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2}}.$$

Dividiert man die beiden Gleichungen, so kann man die Wurzel eliminieren und man erhält

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta^*}{\frac{m_1}{m_2}+\cos\vartheta^*}.$$

Der Winkel ϑ_2 , der die Richtung des Rückstoßes des Targets im Laborsystem beschreibt, läßt sich durch den Streuwinkel im Schwerpunktsystem ausdrücken:

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2}(\pi - \vartheta^*).$$

Dies leitet man wie folgt her: Wir hatten schon gesehen, daß $\vec{p}'_2 = \vec{q} - \vec{q}'$ gilt. Darüberhinaus ist $|\vec{q}|^2 = |\vec{q}'|^2$. Dies ist in Abbildung 2 dargestellt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, daß $\vartheta_2 = \alpha$ gilt. Da zwei Seiten im Dreieck die gleiche Länge haben, gilt $\alpha = \beta$. Die Winkelsumme im Dreieck ist $\vartheta^* + \alpha + \beta = \pi$, und somit folgt die Behauptung $\vartheta_2 = (\pi - \vartheta^*)/2$.

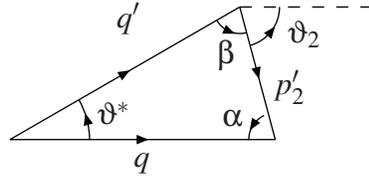


Abbildung 2: Der Zusammenhang zwischen ϑ^* und ϑ_2 . Es gilt $\vartheta_2 = \alpha = \beta$.

Bemerkungen: Ist die Masse des Projektils m_1 sehr viel kleiner als die Masse des Targets m_2 , so gilt

$$\tan \vartheta \stackrel{m_1 \ll m_2}{\approx} \tan \vartheta^*.$$

Im Grenzfall einer unendlichen Targetmasse fallen Laborsystem und Schwerpunktsystem zusammen.

Sind die Massen von Projektil und Target gleich,

$$m_1 = m_2 = m,$$

so folgt aus

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta^*}{1 + \cos \vartheta^*} = \frac{2 \sin \frac{\vartheta^*}{2} \cos \frac{\vartheta^*}{2}}{2 \cos^2 \frac{\vartheta^*}{2}} = \tan \frac{\vartheta^*}{2}$$

und somit

$$\vartheta = \frac{\vartheta^*}{2}$$

sowie

$$\vartheta + \vartheta_2 = \frac{1}{2}\pi.$$

Im Laborsystem laufen die beiden Teilchen also unter 90 Grad auseinander.

Wir betrachten nun die Dynamik des Streuprozesses: Für den relativen Drehimpuls gilt

$$\vec{l} = \mu \vec{x} \times \dot{\vec{x}} = \vec{x} \times \vec{p} = \vec{b} \times \vec{q}.$$

Für den Betrag gilt

$$|\vec{b}| = \frac{|\vec{l}|}{|\vec{q}|}.$$

Wie wir wissen, ist bei einer Zweiteilchenstreuung mittels einer Zentralkraft der relative Bahndrehimpuls erhalten. Die gesamte Energie der Relativbewegung ist ebenfalls erhalten. Wir können sie aus dem Wert bei $t \rightarrow \infty$ bestimmen:

$$E = \frac{|\vec{q}|^2}{2\mu}.$$

Die Bahn eines Teilchens ist also durch die Größen $|\vec{l}|$ und E charakterisiert. Es ist üblich $|\vec{l}|$ durch $b = |\vec{b}|$ zu ersetzen. Im Schwerpunktsystem ist der Zusammenhang zwischen den Koordinaten $\vec{x}_1^*(t)$ des Teilchens 1 und den Relativkoordinaten $\vec{x}(t)$ gegeben durch

$$\vec{x}_1^*(t) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{x}(t).$$

Wir parametrisieren wieder die Relativkoordinaten wie im Zweikörperproblem

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos \varphi(t) \\ r(t) \sin \varphi(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\varphi(t)$ gilt

$$\varphi - \varphi_0 = l \int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V_{\text{eff}}(r))}}.$$

Die Bahn des Teilchens 1 hat einen Punkt des kleinsten Abstands zum Kraftzentrum, den entsprechenden Radius wollen wir mit r_{\min} bezeichnen. Man erhält r_{\min} , indem man die Gleichung

$$E - V_{\text{eff}}(r_{\min}) = 0$$

löst. Wir wählen das Koordinatensystem nun so, daß $\varphi(r_{\min}) = 0$ gilt. Setzen wir noch

$$l = b|\vec{q}| = b\sqrt{2\mu E}$$

so erhalten wir

$$\varphi = b \int_{r_{\min}}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - V_{\text{eff}}(r)/E}}.$$

Sei nun $\varphi_{\max} = \varphi(\infty)$. Wie aus der Abbildung 3 ersichtlich ist, gilt

$$2\varphi_{\max} + \vartheta^* = \pi$$

und somit

$$\vartheta^* = \pi - 2\varphi_{\max} = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - V_{\text{eff}}(r)/E}}.$$

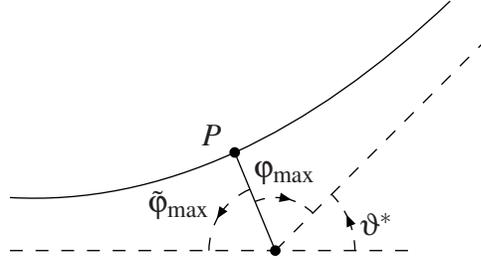


Abbildung 3: Der Streuprozess in Relativkoordinaten. P bezeichnet den Punkt des kleinsten Abstandes vom Streuzentrum. Es gilt $\varphi_{\max} = \tilde{\varphi}_{\max}$ und $\tilde{\varphi}_{\max} + \varphi_{\max} + \vartheta^* = \pi$.

Betrachten wir nun die Situation, daß viele Teilchen (alle mit der Masse m_1) nacheinander auf das Target geschossen werden, so definieren wir zunächst die Intensität I des Teilchenstrahls als die Anzahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit senkrecht zum Teilchenstrahl treten. Wir betrachten nun die Anzahl der Teilchen pro Zeiteinheit, die nach dem Stoß in Richtung ϑ gestreut werden. Etwas genauer betrachten wir alle Teilchen, welche mit einem Polarkwinkel zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ und einem Azimutwinkel zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ gestreut werden. Wir definieren das Raumwinkelement

$$d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Der **differenzielle Wirkungsquerschnitt** des Streuprozesses ist nun definiert durch

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Anzahl der gestreuten Teilchen pro Zeiteinheit und pro Raumwinkelement } d\Omega}{I}.$$

$d\sigma$ hat die Dimension einer Fläche. Integriert man über alle Raumwinkelemente, so ergibt sich der **totale Wirkungsquerschnitt**:

$$\sigma = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right).$$

Bei der Streuung an einem Zentralpotential haben wir eine Rotationssymmetrie bezüglich der Strahlachse. Daher hängt der differenzielle Wirkungsquerschnitt nicht von φ ab. Man gibt daher oft die folgende Größe an, die nur noch differenziell in dem Streuwinkel ϑ ist:

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \vartheta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = 2\pi \sin \vartheta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right).$$

Die Definition des differenziellen Wirkungsquerschnittes hat einen direkten Bezug zu experimentell meßbaren Größen. Wir wollen im folgenden den differenziellen Wirkungsquerschnitt nun auch mit der Theorie in Verbindung setzen. Wie wir bereits diskutiert haben, wird die Bahn

eines Teilchens (und somit auch der Streuwinkel) durch die Energie E und den Stoßparameter b bestimmt. Halten wir die Energie fest, so ist der Streuwinkel ϑ eine Funktion des Stoßparameters b . Wir wollen nun der Einfachheit annehmen, daß diese Funktion umkehrbar ist. Die Anzahl der Teilchen, die man im Zeitintervall Δt zwischen den Winkeln ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ mißt, ist gleich

$$dN = I \Delta t \left(\frac{d\sigma}{d\vartheta} \right) d\vartheta$$

Andererseits ist diese Anzahl gleich der Anzahl der Teilchen, die durch den Ring zwischen $b(\vartheta)$ und $b(\vartheta + d\vartheta)$ im Zeitintervall Δt treten:

$$dN = I \Delta t \cdot 2\pi b(\vartheta) db.$$

Somit erhalten wir

$$\left(\frac{d\sigma}{d\vartheta} \right) d\vartheta = 2\pi b(\vartheta) db,$$

bzw.

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = 2\pi b(\vartheta) \left| \frac{db(\vartheta)}{d\vartheta} \right|.$$

Wir haben wir den Betrag hinzugefügt, da im allgemeinen die Funktion $b(\vartheta)$ mit wachsendem ϑ fallen wird: Ein größerer Streuwinkel entspricht einem kleineren Stoßparameter.

Bemerkung: Wir hatten zur Vereinfachung angenommen, daß die Funktion $\vartheta(b)$ umkehrbar ist. Es gibt Potential, für die diese Annahme nicht zutrifft. Ein Beispiel wäre das attraktive $1/r^2$ -Potential. Hier können Teilchen mit unterschiedlichen Stoßparametern in den gleichen Winkel gestreut werden. Die Bahnen dieser Teilchen unterscheiden sich dadurch, daß das Teilchen das Kraftzentrum gar nicht, einmal oder mehrmals umkreist. In einem solchen Falle kehrt man die Funktion $\vartheta(b)$ auf einem Intervall, auf dem sie monoton ist um und summiert dann über all Intervalle.

Es ist oftmals einfacher, den Wirkungsquerschnitt zunächst im Schwerpunktssystem zu berechnen. Ist $d\sigma/d\vartheta^*$ bekannt, so erhält man den Wirkungsquerschnitt im Laborsystem aus der Beziehung

$$\tan \vartheta = \frac{\sin \vartheta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \vartheta^*}$$

zu

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \frac{d\sigma}{d\vartheta^*} \frac{d\vartheta^*}{d\vartheta} = \left(\frac{1 + \frac{m_1}{m_2} \cos \vartheta^*}{1 + 2\frac{m_1}{m_2} \cos \vartheta^* + \frac{m_1^2}{m_2^2}} \right) \frac{d\sigma}{d\vartheta^*}.$$

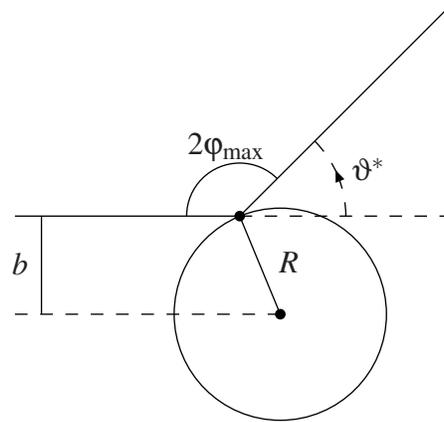


Abbildung 4: Die Streuung an einer harten Kugel.

2.9.1 Streuung an einer harten Kugel*

Als ein erstes Beispiel betrachten wir die Streuung an einer ideal reflektierenden harten Kugel. Dies ist in Abbildung 4 dargestellt. Aus der Geometrie ergibt sich

$$b = R \sin \varphi_{\max} = R \sin \left(\frac{\pi - \vartheta^*}{2} \right) = R \cos \frac{\vartheta^*}{2}.$$

Somit ist

$$\frac{db}{d\vartheta^*} = -\frac{1}{2}R \sin \frac{\vartheta^*}{2}$$

und der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem ergibt sich zu

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta^*} = 2\pi b(\vartheta^*) \left| \frac{db(\vartheta^*)}{d\vartheta^*} \right| = \pi R^2 \sin \frac{\vartheta^*}{2} \cos \frac{\vartheta^*}{2} = \frac{1}{2} \pi R^2 \sin \vartheta^*.$$

Integriert man den differentiellen Wirkungsquerschnitt über all Winkel ϑ^* , so erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt σ :

$$\sigma = \int_0^\pi d\vartheta^* \frac{d\sigma}{d\vartheta^*} = \frac{1}{2} \pi R^2 \int_0^\pi d\vartheta^* \sin \vartheta^* = \pi R^2.$$

Der totale Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer ideal reflektierenden Kugel ist also identisch mit der Stirnfläche der Kugel, die das einlaufende Teilchen sieht.

2.9.2 Rutherford-Streuung*

Wir betrachten nun die Streuung eines elektrisch geladenen Teilchens an einem ebenfalls elektrisch geladenem zweiten Teilchen. Bezeichnen wir mit Q_1 und Q_2 die Ladungen der beiden Teilchen, so wird die Wechselwirkung zwischen den Teilchen durch die **Coulomb-Kraft**

$$\vec{F}_{ij} = -\kappa Q_i Q_j \frac{\vec{x}_j - \vec{x}_i}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}$$

beschrieben. κ ist hierbei eine Konstante, die von der Wahl des Maßeinheitensystems abhängig ist. Im SI-System ist

$$\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot 10^{-7}.$$

Im Gaußschen Maßsystem ist dagegen

$$\kappa = 1.$$

Die Coulomb-Kraft ist wieder eine Zentralkraft und wird durch ein Potential beschrieben

$$V(r) = \frac{\kappa Q_i Q_j}{r}.$$

Das effektive Potential lautet somit

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\kappa Q_i Q_j}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} = \frac{\kappa Q_i Q_j}{r} + \frac{Eb^2}{r^2}.$$

Der minimale Abstand r_{\min} ergibt sich aus der Gleichung $V_{\text{eff}}(r_{\min}) = E$ zu

$$r_{\min} = \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa Q_i Q_j}{E} + \sqrt{\left(\frac{\kappa Q_i Q_j}{E} \right)^2 + 4b^2} \right) = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + 4b^2} \right).$$

Hier haben wir zur Abkürzung $a = \kappa Q_i Q_j / E$ gesetzt. Wir erhalten nun den Streuwinkel im Schwerpunktsystem zu

$$\begin{aligned} \vartheta^* &= \pi - 2\varphi_{\max} = \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - V_{\text{eff}}(r)/E}} \\ &= \pi - 2b \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - ar - b^2}} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int \frac{dr}{r \sqrt{r^2 - ar - b^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{-ar - 2b^2}{r \sqrt{a^2 + 4b^2}},$$

und somit

$$\vartheta^* = \pi - 2 \arcsin \frac{-a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} + 2 \arcsin \frac{-ar_{\min} - 2b^2}{r_{\min} \sqrt{a^2 + 4b^2}}.$$

Nun ist das Argument der zweiten Arkussinusfunktion gerade

$$\frac{-ar_{\min} - 2b^2}{r_{\min} \sqrt{a^2 + 4b^2}} = -1,$$

sowie $\arcsin(-1) = -\pi/2$ und somit

$$\vartheta^* = -2 \arcsin \frac{-a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}}.$$

Wir lösen nun nach b auf und erhalten

$$b(\vartheta^*) = \frac{a}{2 \tan \frac{\vartheta^*}{2}}.$$

Somit ergibt sich der differenzielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta^*} = 2\pi b(\vartheta^*) \left| \frac{db(\vartheta^*)}{d\vartheta^*} \right| = \frac{1}{4} \pi a^2 \frac{\cos \frac{\vartheta^*}{2}}{\sin^3 \frac{\vartheta^*}{2}}.$$

Gibt man den Wirkungsquerschnitt pro Raumwinkelelement im Schwerpunktsystem an $d\Omega^* = 2\pi \sin \vartheta^* d\vartheta^*$ und benutzt man $\sin \vartheta^* = 2 \sin(\vartheta^*/2) \cos(\vartheta^*/2)$, so lautet das Resultat

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{a^2}{16 \sin^4 \frac{\vartheta^*}{2}} = \frac{\kappa^2 Q_i^2 Q_j^2}{16 E^2 \sin^4 \frac{\vartheta^*}{2}}.$$

Dies ist die Formel von Rutherford.

Bemerkungen: Der Wirkungsquerschnitt hängt nicht von den Vorzeichen der Ladungen ab, da die Ladungen im Quadrat eingehen.

Würde man über alle Streuwinkel integrieren, um den totalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen, so wird man auf ein divergentes Integral geführt. Der totale Wirkungsquerschnitt wäre also unendlich groß. Der unendliche Beitrag kommt von der Region kleiner Streuwinkel $\vartheta^* = 0$. Die Divergenz des totalen Wirkungsquerschnittes ist auf die langreichweitige Kraft eines $1/r$ -Potentials zurückzuführen. Kleine Streuwinkel entsprechen großen Stoßparametern. Im totalen Wirkungsquerschnitt zählt man auch Teilchen, die mit sehr großen Stoßparametern fast nicht abgelenkt werden. In einem physikalischen Experiment wird aber immer der Stoßparameter nach oben beschränkt sein, z.B. durch die Abmessungen des Strahlrohres. Dies impliziert eine untere Grenze ϑ_{\min}^* für den Streuwinkel. Integriert man $d\sigma/d\vartheta^*$ von ϑ_{\min}^* bis π , so erhält man ein endliches Ergebnis.

2.10 Rotierende Bezugssysteme

Wir haben uns bisher ausschließlich mit Inertialsystemen beschäftigt. In diesen Systemen gilt das erste Newtonsche Gesetz: Ein Teilchen, auf das keine Kraft wirkt, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden Linie. Man kommt von einem Inertialsystem zu einem anderen Inertialsystem durch eine Galilei-Transformation.

Wir wollen nun noch eine Klasse von Bezugssystemen diskutieren, die **keine** Inertialsysteme sind. Dies sind die rotierenden Bezugssysteme. Betrachtet man die Erdrotation, so ist einsichtig, daß die rotierenden Bezugssysteme in der Anwendung durchaus ihre Berechtigung haben. Allgemein treten in nicht-Inertialsystemen Scheinkräfte auf. Im Falle eines rotierenden Bezugssystems sind dies die Corioliskraft und die Zentrifugalkraft. Diese Scheinkräfte wollen wir nun herleiten.

Sei S ein Inertialsystem und S' ein weiteres Koordinatensystem, welches mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = |\vec{\omega}|$ um die Achse in Richtung von $\vec{\omega}$ rotiert. S' ist kein Inertialsystem.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß $\vec{\omega}$ in Richtung der z -Achse zeigt, d.h.

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für die Umrechnung der Koordinaten

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\omega t - \psi) + y \sin(\omega t - \psi), \\ y' &= -x \sin(\omega t - \psi) + y \cos(\omega t - \psi), \\ z' &= z. \end{aligned}$$

ψ is hierbei ein konstanter Winkel, der angibt wie die x - y -Ebenen der Koordinatensysteme zum Zeitpunkt $t = 0$ zueinander orientiert sind.

Im allgemeineren Fall zeigt $\vec{\omega}$ in eine beliebige Richtung. Diese können wir durch zwei Winkel angeben:

$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}| \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Man erhält die Koordinatentransformation, indem man zunächst vom System S ausgehend um die z -Achse mit dem Winkel φ in ein temporäres System S'' mit den Achsen x'' , y'' und $z'' = z$ rotiert. Anschließend rotiert man um die y'' -Achse mit dem Winkel $(-\vartheta)$ in ein Koordinatensystem S''' mit den Achsen x''' , $y''' = y''$ und z''' . Abschließend rotiert man mit dem Winkel $\omega t - \psi$ um die z''' -Achse. In Formeln ausgedrückt hat man

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A_z(\omega t - \psi) B_y(-\vartheta) C_z(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

wobei die Rotationsmatrizen $A_z(\omega t - \psi)$, $B_y(-\vartheta)$ und $C_z(\varphi)$ gegeben sind durch

$$A_z(\omega t - \psi) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \psi) & \sin(\omega t - \psi) & 0 \\ -\sin(\omega t - \psi) & \cos(\omega t - \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_y(-\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

$$C_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man überprüft leicht, daß nun im System S' der Vektor der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{\omega}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

lautet. Die Tatsache, daß sich jedes rotierte Koordinatensystem durch die Hintereinanderausführung von drei einfachen Drehungen in jeweils einer Ebene erzeugen läßt, war schon Euler bekannt. Üblicherweise wählt man die erste Drehung in der x - y -Ebene, die zweite Drehung in der neuen y - z -Ebene und die dritte Ebene in der aus dem vorherigen Schritt erhaltenen x - y -Ebene. In Formeln:

$$\vec{x}' = A_z(\alpha) B_x(\beta) C_z(\gamma) \vec{x},$$

wobei

$$A_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_x(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, C_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die drei Winkel α , β und γ nennt man die Euler-Winkel.

Bemerkung: Es gibt insgesamt 12 Möglichkeiten, wie die drei Winkel, die die Rotationsmatrix bestimmen, gewählt werden können. Sechs Möglichkeiten sind von der Form $A_z B_x C_z$, wobei die erste und die dritte Drehung jeweils vom gleichen Typ ist. Diese Möglichkeiten sind:

$$A_z B_x C_z, A_z B_y C_z, A_y B_x C_y, A_y B_z C_y, A_x B_y C_x, A_x B_z C_x.$$

Bei den anderen sechs Möglichkeiten sind alle Drehungen von unterschiedlichen Typ. Hier haben wir

$$A_x B_y C_z, A_x B_z C_y, A_y B_x C_z, A_y B_z C_x, A_z B_x C_y, A_z B_y C_x.$$

Zwei aufeinanderfolgende Drehungen können nie vom gleichen Typ sein, da sie sonst zu einer Drehung mit einem Drehwinkel der der Summe der einzelnen Drehwinkel entspricht zusammengefasst werden können. Im obigen Beispiel haben wir die Drehachsen so gewählt, daß ausgehend vom Vektor $\vec{\omega}$ der transformierte Vektor $\vec{\omega}'$ im System S' entlang der z' -Achse liegt. Für die Transformation vom System S in das System S' und zurück gilt also

$$\vec{x}'(t) = A_z(\omega t - \psi) B_y(-\vartheta) C_z(\varphi) \vec{x}(t), \quad \vec{x}(t) = C_z(-\varphi) B_y(\vartheta) A_z(-\omega t + \psi) \vec{x}'(t).$$

Betrachten wir nun $\ddot{\vec{x}}(t)$ und drücken dies durch die Koordinaten im System S' aus, so finden wir

$$\ddot{\vec{x}}(t) = C_z(-\varphi) B_y(\vartheta) [A_z(-\omega t + \psi) \ddot{\vec{x}}'(t) + 2\dot{A}_z(-\omega t + \psi) \dot{\vec{x}}'(t) + \ddot{A}_z(-\omega t + \psi) \vec{x}'(t)].$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \dot{A}_z(-\omega t + \psi) &= \\ &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \psi) & -\sin(\omega t - \psi) & 0 \\ \sin(\omega t - \psi) & \cos(\omega t - \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -\sin(\omega t - \psi) & -\cos(\omega t - \psi) & 0 \\ \cos(\omega t - \psi) & -\sin(\omega t - \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t - \psi) & -\sin(\omega t - \psi) & 0 \\ \sin(\omega t - \psi) & \cos(\omega t - \psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich

$$\dot{A}_z(-\omega t + \psi) \dot{\vec{x}}'(t) = A_z(-\omega t + \psi) \vec{\omega}' \times \dot{\vec{x}}'(t).$$

Ebenso ergibt sich

$$\ddot{A}_z(-\omega t + \psi) \vec{x}'(t) = A_z(-\omega t + \psi) \vec{\omega}' \times [\vec{\omega}' \times \vec{x}'(t)].$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\ddot{\vec{x}}(t) = C_z(-\varphi) B_y(\vartheta) A_z(-\omega t + \psi) [\ddot{\vec{x}}'(t) + 2\vec{\omega}' \times \dot{\vec{x}}'(t) + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{x}'(t))].$$

Das System S haben wir als ein Inertialsystem vorausgesetzt. In diesem System gilt also das zweite Newtonsche Gesetz:

$$m\ddot{\vec{x}}(t) = \vec{F}.$$

Setzen wir nun für $\ddot{\vec{x}}(t)$ ein und bringen die Drehmatrizen auf die andere Seite, so erhalten wir

$$m\ddot{\vec{x}}'(t) + 2m\vec{\omega}' \times \dot{\vec{x}}'(t) + m\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{x}'(t)) = A_z(\omega t - \psi) B_y(-\vartheta) C_z(\varphi) \vec{F}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite ist nichts anderes als die Kraft transformiert in das System S' :

$$\vec{F}' = A_z(\omega t - \psi) B_y(-\vartheta) C_z(\varphi) \vec{F}.$$

Löst man nun nach $m\ddot{\vec{x}}'(t)$ auf, so erhält man

$$m\ddot{\vec{x}}'(t) = \vec{F}' - 2m\vec{\omega}' \times \dot{\vec{x}}'(t) - m\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{x}'(t)).$$

Wir sehen, daß wir auf der rechten Seite neben dem erwarteten Term \vec{F}' zwei Zusatzterme bekommen haben. Diese haben ihren Ursprung darin, daß das System S' gegenüber dem System S beschleunigt wird. Sie werden als **Scheinkräfte** bezeichnet. Den geschwindigkeitsabhängigen Term

$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\omega}' \times \dot{\vec{x}}'(t)$$

bezeichnet man als **Corioliskraft**, den zweiten Term

$$\vec{F}_{\text{Zentrifugal}} = -m\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{x}'(t))$$

bezeichnet man als **Zentrifugalkraft**.

3 Der Lagrange-Formalismus

3.1 Die Lagrange-Formulierung der klassischen Mechanik

Wir haben gesehen, daß wir zu der Beschreibung eines Systems von n Teilchen entweder $(3n)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung oder $(6n)$ Differentialgleichungen erster Ordnung benötigen. Wir können uns nun fragen, ob wir diese Information auch “eleganter” oder kompakter angeben können. Dies ist in der Tat möglich. Ein physikalisches System mit n Teilchen kann durch die Angabe einer einzigen **Lagrange-Funktion**

$$L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n, t)$$

beschrieben werden. Diese Lagrange-Funktion hängt von $(6n + 1)$ Variablen ab: $(3n)$ Ortskoordinaten $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, $(3n)$ Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n$ sowie der Zeit t . Es empfiehlt sich, die $(3n)$ Ortskoordinaten zu einem einzigen Vektor

$$\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)^T$$

der Dimension $(3n)$ zusammenzufassen. Ebenso faßt man die Geschwindigkeiten zu einem Vektor

$$\dot{\vec{x}} = (\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)^T$$

der Dimension $(3n)$ zusammen. Die Lagrange-Funktion läßt sich somit als

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$$

schreiben. Die Newtonschen Bewegungsgleichungen erhält man aus der Lagrange-Funktion, indem man die **Euler-Lagrange-Gleichungen** aufstellt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_i} = 0,$$

wobei i eine der $(3n)$ Komponenten der Vektoren \vec{x} und $\dot{\vec{x}}$ bezeichnet. Hierbei sind die partiellen und totalen Ableitungen wie am folgenden Beispiel verdeutlicht zu verstehen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (c_1 x + c_2 \dot{x} + c_3 t) &= c_1, \\ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} (c_1 x + c_2 \dot{x} + c_3 t) &= c_2, \\ \frac{\partial}{\partial t} (c_1 x + c_2 \dot{x} + c_3 t) &= c_3, \\ \frac{d}{dt} (c_1 x + c_2 \dot{x} + c_3 t) &= c_1 \dot{x} + c_2 \ddot{x} + c_3. \end{aligned}$$

Man erhält aus der Kenntnis der Lagrange-Funktion auch die Gesamtenergie des Systems, indem man

$$E = \left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - L$$

berechnet.

Für den Fall, daß die Kräfte sich durch ein Potential darstellen lassen, nimmt die Lagrange-Funktion für das System die einfache Form

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}) - V(\vec{x})$$

an, d.h. sie ist gegeben durch die Differenz von kinetischer Energie und potentieller Energie. In diesem Fall hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit ab.

Diese Aussagen werden wir später auf zwei Arten herleiten: Zum einen über das Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamiltonsches Prinzip), zum zweiten über das Prinzip der virtuellen Ver-rückungen (d'Alembertsches Prinzip).

Zunächst ist es allerdings sinnvoller, sich mit der Lagrange-Funktion und den Euler-Lagrange-Gleichungen vertraut zu machen und diese Aussagen nur anhand von einfachen Beispielen zu überprüfen.

Wir beginnen mit einem einzelnen Teilchen, welches sich im Kraftfeld einer konservativen Kraft bewegt. Der Ort des Teilchens wird durch den Dreiervektor $\vec{x}(t)$ beschrieben, die Geschwindigkeit des Teilchens durch den Dreiervektor $\dot{\vec{x}}(t)$. Die kinetische Energie des Teilchens ist wie üblich durch

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

gegeben. Die Kraft auf das Teilchen soll konservativ sein, daher läßt sie sich durch ein Potential darstellen:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}).$$

Die potentielle Energie des Teilchens ist dann einfach

$$V(\vec{x}).$$

Somit ergibt sich die Lagrange-Funktion in diesem Fall zu

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}) - V(\vec{x}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}).$$

Die Lagrange-Funktion hängt in diesem Fall nur von \vec{x} und $\dot{\vec{x}}$ ab, sie hängt nicht explizit von der Zeit t ab. Wir berechnen nun $\partial L / \partial x_i$ und $\partial L / \partial \dot{x}_i$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x}),$$

da die kinetische Energie nur von $\dot{\vec{x}}$, aber nicht von \vec{x} abhängt. Desweiteren haben wir

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i.$$

Hier haben wir ausgenutzt, daß die potentielle Energie $V(\vec{x})$ von $\dot{\vec{x}}$ unabhängig ist. Wir benötigen noch die Zeitableitung von $\partial L/\partial \dot{x}_i$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\ddot{x}_i.$$

Somit lauten die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_i} &= 0, \\ m\ddot{x}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x}) &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist allerdings

$$\frac{\partial}{\partial x_i} V(\vec{x}) = -F_i,$$

und daher lassen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen auch als

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}$$

schreiben. Dies ist nichts anderes als die uns schon bekannte Newtonsche Bewegungsgleichung. Wir überprüfen nun noch die Beziehung für die Gesamtenergie. Es ist

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_i m\dot{x}_i^2 = m\dot{\vec{x}}^2,$$

und somit

$$E = \left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - L = m\dot{\vec{x}}^2 - L = m\dot{\vec{x}}^2 - \left(\frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) \right) = \frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}),$$

was genau der Summe aus kinetischer und potentieller Energie entspricht.

Wir können das Beispiel eines Teilchens leicht auf ein System von n Teilchen verallgemeinern. Wir nehmen wieder an, daß die Kräfte konservativ sind, d.h. die Kraft auf das j -te Teilchen ist gegeben durch

$$\vec{F}_j = -\vec{\nabla}_j V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

Wir fassen alle Koordinaten zu einem Vektor der Dimension $(3n)$ zusammen:

$$\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)^T$$

Die Lagrange-Funktion ist wieder die Differenz von kinetischer Energie und potentieller Energie:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = T(\dot{\vec{x}}) - V(\vec{x}) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 \right) - V(\vec{x}).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen ergeben sich nun zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_i} &= 0, & 1 \leq i \leq 3n \\ m_j \ddot{x}_j + \vec{\nabla}_j V(\vec{x}) &= 0, & 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

(In der ersten Zeile bezeichnet i eine der $(3n)$ Komponenten des Vektors \vec{x} , in der zweiten Zeile bezeichnet j eines der n Teilchen.) Somit finden wir die Newtonsche Bewegungsgleichung für das j -te Teilchen wieder

$$m_j \ddot{x}_j = \vec{F}_j.$$

Wir berechnen auch die Gesamtenergie und finden

$$E = \left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - L = \left(\sum_{j=1}^n m_j \dot{x}_j^2 \right) - L = \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 \right) + V(\vec{x}).$$

Die Gesamtenergie ist wie erwartet die Summe aus kinetischer und potentieller Energie.

Als drittes und etwas schwierigeres Beispiel betrachten ein Beispiel, in dem die Kräfte nicht konservativ sind. Wir betrachten ein Teilchen in einem elektromagnetischen Feld. Wir erinnern uns, daß die Lorentzkraft auf ein Teilchen mit der Ladung q im Gaußschen Maßsystem gegeben ist durch

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right).$$

Das elektrische und magnetische Feld können wir durch ein skalares Potential Φ und ein Vektorpotential \vec{A} beschreiben:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{x}, t), \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Da sowohl zum einen das elektrische Feld \vec{E} als auch das magnetische Feld explizit von der Zeit abhängen können und da zum zweiten die Lorentzkraft von der Geschwindigkeit des Teilchens

abhängt, ist diese Kraft im allgemeinen nicht konservativ. Wir können allerdings wieder die Newtonschen Bewegungsgleichungen aus einer Lagrange-Funktion ableiten. Diese Lagrange-Funktion lautet

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V_{\text{Lorentz}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t),$$

wobei $V_{\text{Lorentz}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ ein verallgemeinertes Potential darstellt, welches nun explizit von der Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}$ und der Zeit t abhängt:

$$V_{\text{Lorentz}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = q \left[\Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right].$$

Wir überprüfen wieder, ob die Euler-Lagrange-Gleichung die Newtonsche Bewegungsgleichung liefert. Es ist nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_i} &= -q \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial x_i} + \frac{q \dot{\vec{x}}}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} &= m \dot{x}_i + \frac{q}{c} A_i(\vec{x}, t), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} &= m \ddot{x}_i + \frac{q}{c} \left[\frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{x}, t) \right]. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile haben wir die Kettenregel angewendet:

$$\frac{d}{dt} A_i(\vec{x}, t) = \frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} A_i(\vec{x}, t) \right) \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{x}, t).$$

Somit lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_i} &= 0, \\ m \ddot{x}_i + \frac{q}{c} \frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{q \dot{\vec{x}}}{c} \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{x}, t) + q \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial x_i} - \frac{q \dot{\vec{x}}}{c} \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist allerdings

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{x}, t)$$

und somit

$$\frac{q}{c} \frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial t} + q \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = -q E_i(\vec{x}, t).$$

Das magnetische Feld ist gegeben durch

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t).$$

Betrachten wir nun die x -Komponente von

$$\dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t)),$$

so findet man

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t)) \Big|_x &= v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \\ &= v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ähnliche Identitäten findet man für die y - und die z -Komponente. Somit läßt sich zeigen, daß

$$\dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t)) \Big|_i = \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial x_i} - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{x}, t)$$

gilt. Somit ist

$$\frac{q}{c} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} A_i(\vec{x}, t) - \frac{q}{c} \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = -\frac{q}{c} \dot{\vec{x}} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t)) \Big|_i = -\frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \Big|_i.$$

Fügen wir alles zusammen, so erhalten wir aus der Euler-Lagrange-Gleichung die Beziehung

$$m\ddot{\vec{x}} - q\vec{E}(\vec{x}, t) - \frac{q}{c} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) = 0.$$

Dies ist nichts anderes als die Newtonsche Bewegungsgleichung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld:

$$m\ddot{\vec{x}} = q \left(\vec{E}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}(\vec{x}, t) \right).$$

Wir betrachten noch die Gesamtenergie des Teilchens

$$E = \left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - L = m\dot{\vec{x}}^2 + \frac{q}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) - L = \frac{1}{2} m\dot{\vec{x}}^2 + q\Phi(\vec{x}, t).$$

Der Term proportional zu $\vec{v} \cdot \vec{A}$ hebt sich auf und man erhält die kinetische Energie des Teilchens plus einen Term $q\Phi$.

3.2 Das Wirkungsprinzip

Im vorherigen Abschnitt haben wir anhand einiger Beispiele gesehen, daß man aus der Kenntnis der Lagrange-Funktion die Newtonschen Bewegungsgleichungen herleiten kann, indem man die Euler-Lagrange-Gleichungen aufstellt:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_i} = 0,$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Euler-Lagrange-Gleichungen aus einem fundamentaleren Prinzip folgen. Hierzu betrachten wir die **Wirkung**. Die Wirkung ist definiert für eine gegebene Bahnkurve $\vec{x}(t)$ als das Integral der Lagrange-Funktion über die Zeit von einem Anfangszeitpunkt t_a zu einem Endzeitpunkt t_b :

$$S = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$$

Wir können die Wirkungsgröße für verschiedene (nicht notwendigerweise physikalische) Bahnkurven $\vec{x}(t)$ betrachten, in dieser Weise wird die Wirkung S zu einem Funktional von $\vec{x}(t)$:

$$S[\vec{x}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$$

Wir betrachten nun alle Bahnkurven $\vec{x}(t)$, welche die Randbedingungen

$$\vec{x}(t_a) = \vec{x}_a, \quad \vec{x}(t_b) = \vec{x}_b,$$

erfüllen. In anderen Worten interessieren wir uns für alle Bahnkurven, welche die Bewegung eines Teilchens von Ort \vec{x}_a zur Zeit t_a zum Ort \vec{x}_b zur Zeit t_b beschreiben.

Das **Wirkungsprinzip** besagt nun, daß unter allen möglichen Bahnen die physikalische Bahn diejenige ist, welche die Wirkung minimiert. In Formeln bedeutet dies:

$$S[\vec{x}_{\text{phys}}(t)] \leq S[\vec{x}(t)] \quad \text{für alle } \vec{x}(t) \text{ mit } \vec{x}(t_a) = \vec{x}_a, \vec{x}(t_b) = \vec{x}_b.$$

Das Wirkungsprinzip wird oft auch als **Prinzip der kleinsten Wirkung** oder als **Hamiltonsches Prinzip** bezeichnet.

Wir können nun zeigen, daß aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen.

Nehmen wir an, daß $\vec{x}_{\text{phys}}(t)$ das Funktional S minimiert. Dann betrachten wir hilfsweise eine zweimal stetig differenzierbare Bahn $\delta\vec{x}(t)$ mit

$$\delta\vec{x}(t_a) = 0, \quad \delta\vec{x}(t_b) = 0.$$

Dann beschreibt $\vec{x}_{\text{phys}}(t) + \varepsilon \delta\vec{x}(t)$ eine Bahn, welche die Randbedingungen

$$\vec{x}_{\text{phys}}(t_a) + \varepsilon \delta\vec{x}(t_a) = \vec{x}_a, \quad \vec{x}_{\text{phys}}(t_b) + \varepsilon \delta\vec{x}(t_b) = \vec{x}_b$$

erfüllt. Hierbei ist $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Wir sagen, daß die Bahn $\vec{x}_{\text{phys}}(t) + \varepsilon \delta\vec{x}(t)$ eine **Variation** der Bahn $\vec{x}_{\text{phys}}(t)$ ist. Da $\vec{x}_{\text{phys}}(t)$ nach Annahme die Wirkung minimiert, gilt

$$S[\vec{x}_{\text{phys}}(t)] \leq S[\vec{x}_{\text{phys}}(t) + \varepsilon \delta\vec{x}(t)],$$

für alle Variationen von $\vec{x}_{\text{phys}}(t)$. Insbesondere gilt

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{x}_{\text{phys}}(t) + \varepsilon \delta\vec{x}(t)]|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{x}_{\text{phys}}(t) + \varepsilon \delta\vec{x}(t)] &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_a}^{t_b} dt L(\vec{x}_{\text{phys}}(t) + \varepsilon \delta\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}_{\text{phys}}(t) + \varepsilon \delta\dot{\vec{x}}(t), t) \\ &= \int_{t_a}^{t_b} dt \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} \delta x_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i(t) \right]. \end{aligned}$$

Den zweiten Ausdruck können wir partiell integrieren:

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta \dot{x}_i(t) &= \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \frac{d}{dt} \delta x_i(t) \\ &= \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i(t) \right|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i(t) = - \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) \delta x_i(t). \end{aligned}$$

Wegen $\delta x_i(t_a) = \delta x_i(t_b) = 0$ verschwinden die Randterme. Wir erhalten also

$$\sum_i \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] \delta x_i(t) = 0.$$

Da dies für beliebige ‘‘Variationen’’ $\delta x_i(t)$ gilt, folgt daß jede eckige Klammer für sich verschwinden muß, also

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0.$$

Dies sind die Euler-Lagrange-Gleichungen.

Bemerkung: Zur Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen ist nur die Bedingung

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[\vec{x}_{\text{phys}}(t) + \varepsilon \delta\vec{x}(t)]|_{\varepsilon=0} = 0$$

notwendig. Diese Gleichung besagt, daß die Wirkung für die physikalische Bahn **extremal** wird. Ob ein Minimum oder ein Maximum vorliegt, ist hierbei nicht relevant. Streng genommen sollte man daher auch vom ‘‘Prinzip der extremalen Wirkung’’ sprechen. Man schreibt auch oft, daß die physikalische Bahn diejenige ist, für die die Variation der Wirkung verschwindet:

$$\delta S[\vec{x}(t)] = 0.$$

3.3 Weitere Anwendungen der Variationsrechnung*

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß sich die Euler-Lagrange-Gleichungen (und damit die Newtonschen Bewegungsgleichungen) aus der Forderung ergeben, daß die Bahnkurve $\vec{x}(t)$ die Wirkung $S[\vec{x}(t)]$ minimiert. Zur Herleitung haben wir die Variationsrechnung benutzt. Wir wollen an dieser Stelle noch weitere Beispiele für die Anwendung der Variationsrechnung behandeln.

Beispiel 1: Die Geodätengleichung. Wir betrachten eine Schar von Kurven

$$\begin{aligned}\vec{f} &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \lambda &\rightarrow \vec{f}(\lambda)\end{aligned}$$

mit den Randbedingungen

$$\vec{f}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun diejenige Kurve, welche die kürzeste Verbindung zwischen dem Anfangsort \vec{x}_0 und dem Endort \vec{x}_1 darstellt. Diese Kurve bezeichnet man als **Geodäte**.

Wir betrachten nun zunächst eine beliebige Kurve zu den gegebenen Randbedingungen. Die Kurvenlänge ist gegeben durch

$$l = \int_0^1 d\lambda \left| \frac{d\vec{f}(\lambda)}{d\lambda} \right| = \int_0^1 d\lambda \sqrt{\left(\frac{df_x}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{df_y}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{df_z}{d\lambda}\right)^2}.$$

Die Kurvenlänge ist von der Parametrisierung unabhängig. Ist nun $df_x/d\lambda \neq 0$ für alle $\lambda \in [0, 1]$, so können wir die x -Koordinate als Kurvenparameter wählen. Wir setzen also

$$x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0).$$

Nach dieser Umparametrisierung ist unsere Kurve gegeben durch

$$\begin{aligned}\vec{f} &: [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ x &\rightarrow \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{f}_y(x) \\ \tilde{f}_z(x) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

und erhalten somit für die Kurvenlänge

$$l = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + (\tilde{f}'_y)^2 + (\tilde{f}'_z)^2},$$

wobei $\tilde{f}'_y = d\tilde{f}_y/dx$ und $\tilde{f}'_z = d\tilde{f}_z/dx$ ist.

Setzen wir nun

$$\vec{g}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_y(x) \\ \tilde{f}_z(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{g}'(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}'_y(x) \\ \tilde{f}'_z(x) \end{pmatrix},$$

und

$$L(\vec{g}, \vec{g}', x) = \sqrt{1 + (\vec{g}'(x))^2},$$

$$S[\vec{g}(x)] = \int_{x_0}^{x_1} dx L(\vec{g}, \vec{g}', x),$$

so können wir das Geodätenproblem wie folgt umformulieren: Gesucht ist die Kurve, welche $S[\vec{g}(x)]$ minimiert. Eine notwendige Bedingung hierfür ist wieder, daß $S[\vec{g}(x)]$ ein Extremum annimmt, d.h.

$$\delta S[\vec{g}(x)] = 0.$$

Dies führt wieder zu den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial g'_i} - \frac{\partial L}{\partial g_i} = 0, \quad i \in \{1, 2\}.$$

In diesem Fall ist $\partial L / \partial g_i = 0$ und

$$\frac{\partial L}{\partial g'_i} = \frac{g'_i(x)}{\sqrt{1 + (\vec{g}'(x))^2}}.$$

Somit ergibt sich für die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{g'_i(x)}{\sqrt{1 + (\vec{g}'(x))^2}} \right] = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{g'_i(x)}{\sqrt{1 + (\vec{g}'(x))^2}} = c_i, \quad i \in \{1, 2\},$$

wobei c_1 und c_2 zwei Konstanten sind. Quadriert man die beiden Gleichungen für $i = 1$ und $i = 2$ und zählt sie dann zusammen, so läßt sich zeigen, daß

$$(\vec{g}'(x))^2 = \text{const}$$

gilt. Somit folgt

$$g'_i(x) = \tilde{c}_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Hieraus folgt nun wiederum

$$g_i(x) = \tilde{c}_i x + d_i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Berücksichtigt man nun die Randbedingungen

$$\begin{aligned} g_1(x_0) &= y_0, & g_1(x_1) &= y_1, \\ g_2(x_0) &= z_0, & g_2(x_1) &= z_1, \end{aligned}$$

so findet man

$$\begin{aligned} g_1(x) &= (y_1 - y_0) \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} + y_0, \\ g_2(x) &= (z_1 - z_0) \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} + z_0, \end{aligned}$$

Fügt man alles zusammen und geht man zurück auf die Parametrisierung mittels λ , so findet man

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{pmatrix}.$$

Dies stellt eine Gerade dar. Die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten $(x_0, y_0, z_0)^T$ und $(x_1, y_1, z_1)^T$ ist also eine gerade Strecke.

Beispiel 2: Die Brachistochronengleichung. Als zweites Beispiel wollen wir die Situation betrachten, in der eine Bahnkurve gesucht wird die zwei gegebene Punkte verbindet, so daß ein Teilchen unter dem Einfluß eines konstanten Schwerfeldes diese Bahn in kürzester Zeit durchläuft. Reibungskräfte sollen hierbei vernachlässigt werden. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel ist nun nicht nach dem kürzesten Wege gefragt, sondern nach der kürzesten Zeit. Diese Frage ist zum Beispiel bei der Konstruktion von Notrutschen bei Flugzeugen relevant. Wir wollen gleich zu Beginn annehmen, daß die Bewegung in einer Ebene erfolgt, die wir als die x - z -Ebene wählen können. Die Schwerkraft wirke in Richtung der negativen z -Achse. Als Startpunkt wählen wir $(x_0, z_0) = (0, 0)$. Der Endpunkt sei

$$(x_1, z_1).$$

Da die Schwerkraft in Richtung der negativen z -Achse wirkt, sei $z_1 < 0$. Wir nehmen weiter an, daß die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens Null ist.

Wir können wieder wie zuvor x als Kurvenparameter wählen, d.h. die Kurve ist von der Form

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} x \\ z(x) \end{pmatrix},$$

mit

$$z(0) = 0, \quad z(x_1) = z_1.$$

Hat das Teilchen die Geschwindigkeit v und durchläuft es das infinitesimale Weegelement ds längs der Kurve, so benötigt es hierfür die infinitesimale Zeit

$$\frac{ds}{v}$$

Das infinitesimale Weegelement längs der Kurve zwischen den Punkten mit den Kurvenparametern x und $x + dx$ ist

$$\sqrt{1 + (z'(x))^2} dx.$$

Somit ergibt sich für die Gesamtzeit

$$t = \int_0^{x_1} dx \frac{\sqrt{1 + (z'(x))^2}}{v}.$$

Wir benötigen noch eine Beziehung für die Geschwindigkeit: Die Energieerhaltung liefert

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgz,$$

und somit ist

$$v = \sqrt{-2gz}.$$

Wir können das Problem nun wieder als Variationsproblem formulieren: Gesucht ist eine Kurve $z(x)$ mit $z(0) = 0$ und $z(x_1) = z_1$, so daß die Größe

$$S[z(x)] = \int_0^{x_1} dx L(z, z', x), \quad L(z, z', x) = \frac{\sqrt{1 + (z'(x))^2}}{\sqrt{-2gz(x)}}$$

minimiert wird. Wir stellen wieder die Euler-Lagrange-Gleichung auf

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Es ist

$$\frac{\partial L}{\partial z} = g \frac{\sqrt{1 + (z')^2}}{(-2gz)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{-2gz(1+(z')^2)}},$$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z'} = \frac{z''}{\sqrt{-2gz(1+(z')^2)}} - \frac{z' \left[-gz'(1+(z')^2) - 2gzz'z'' \right]}{\left(-2gz(1+(z')^2) \right)^{\frac{3}{2}}},$$

Fügt man nun alles zusammen, so findet man die Differentialgleichung

$$2zz'' + (z')^2 + 1 = 0.$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Durch Differenzieren überprüft man die folgende Aussage: Jede Funktion, die die Differentialgleichung erster Ordnung

$$z(1+(z')^2) = \text{const}$$

erfüllt, erfüllt auch die obige Differentialgleichung zweiter Ordnung. Wir werden später im Rahmen des Noether-Theorems eine Methode kennenlernen, wie man aus der Kenntnis, daß die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Variablen x abhängt, die Differentialgleichung erster Ordnung relativ schnell finden kann. Im wesentlichen berechnet man

$$z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L = -\frac{1}{\sqrt{-2gz(1+(z')^2)}}.$$

Aus dem Noether-Theorem folgt, daß dieser Ausdruck konstant ist. Dies ergibt die obige Differentialgleichung erster Ordnung.

Die Lösung der Differentialgleichung

$$z(1+(z')^2) = -2R$$

ist durch eine Zykloide gegeben:

$$x(\varphi) = R(\varphi - \sin \varphi),$$

$$z(\varphi) = -R(1 - \cos \varphi),$$

wie man leicht durch Einsetzen überprüft: Es ist zunächst

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = -\frac{\sin \varphi}{1 - \cos \varphi},$$

und damit

$$z(1+(z')^2) = -R(1 - \cos \varphi) \left(1 + \frac{\sin^2 \varphi}{(1 - \cos \varphi)^2} \right) = -2R.$$

3.4 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten

Wir sind bisher immer davon ausgegangen, daß ein System von n Teilchen durch $(3n)$ Ortskoordinaten beschrieben wird. Wir sprechen in diesem Fall von einem System mit $(3n)$ Freiheitsgraden.

Nun kann es aber durchaus sein, daß ein System von n -Teilchen weniger Freiheitsgrade zur Verfügung hat. Man denke hier zum Beispiel an eine Achterbahn. Der Wagen wird durch die Führungsschiene zu einer eindimensionalen Bewegung gezwungen. Der Wagen hat daher nur einen Freiheitsgrad. Ein weiteres Beispiel ist ein Teilchen auf der Oberfläche einer massiven Kugel, das durch die Gravitationskraft sich nur auf der Oberfläche der Kugel bewegen kann. Dieses Teilchen hat nur zwei Freiheitsgrade.

In diesen Fällen sprechen wir davon, daß das System **Zwangsbedingungen** unterworfen ist. Lassen sich die Zwangsbedingungen durch eine Gleichung, die die Koordinaten der Teilchen und der Zeit in Beziehung setzt und die die Form

$$f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) = 0$$

hat, darstellen, so spricht man von **holonomen Zwangsbedingungen**. Ein einfaches Beispiel ist der Fall, in dem ein punktförmiges Teilchen zu einer Bewegung auf einer Kugeloberfläche mit Radius R eingeschränkt ist. In diesem Fall läßt sich die Zwangsbedingung wie folgt angeben:

$$\vec{x}^2 - R^2 = 0.$$

Liegen mehrere holonome Zwangsbedingungen vor, so lassen sich diese durch ein System von Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) &= 0, \\ f_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) &= 0, \\ &\dots \quad \dots \\ f_r(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) &= 0 \end{aligned}$$

angeben. Wir bezeichnen diese Zwangsbedingungen als unabhängig, falls die $(r \times 3n)$ -Matrix

$$M_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

für alle t den Rang r hat.

Zwangsbedingungen, die nicht auf dieser Weise darstellbar sind, nennt man **nicht-holonom**. Beispiele für nicht-holonome Zwangsbedingungen sind Ungleichungen. Diese treten zum Beispiel auf, falls ein Gas in einen würfelförmigen Behälter eingeschlossen wird:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_i, \quad x_i \leq a, \\ 0 \leq y_i, \quad y_i \leq a, \\ 0 \leq z_i, \quad z_i \leq a, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Wir wollen noch ein weiteres Beispiel für nicht-holonome Zwangsbedingungen betrachten. Verwenden wir wieder den Vektor

$$\vec{x} = (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)^T$$

für ein System von n Teilchen, so ist eine holonome Zwangsbedingung gegeben durch

$$f(\vec{x}, t) = 0.$$

Differenziert man diese Gleichung nach der Zeit, so erhält man

$$\left(\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i \right) + \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0.$$

Wir betrachten nun allgemein Zwangsbedingungen der Form

$$\left(\sum_{i=1}^{3n} g_i(\vec{x}, t) \cdot \dot{x}_i \right) + g_0(\vec{x}, t) = 0.$$

Gibt es eine Funktion $G(\vec{x}, t)$, so daß

$$\frac{\partial G(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = g_i(\vec{x}, t), \quad \frac{\partial G(\vec{x}, t)}{\partial t} = g_0(\vec{x}, t),$$

gilt, so bezeichnet man die obige Gleichung als **exakt**. In diesem Fall läßt sich die Differentialgleichung integrieren und man findet

$$G(\vec{x}, t) = c,$$

d.h. wir erhalten wieder eine holonome Zwangsbedingung. Nun ist aber nicht jede Differentialgleichung der obigen Form exakt. Es läßt sich zeigen, daß eine Differentialgleichung der obigen Form genau dann exakt ist, falls

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial g_i}{\partial t} = \frac{\partial g_0}{\partial x_i}$$

gilt. Wir bezeichnen eine Differentialgleichung der obigen Form als **integrierbar**, falls es eine nirgends verschwindende Funktion $u(\vec{x}, t)$ gibt, so daß die Differentialgleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{3n} u(\vec{x}, t) g_i(\vec{x}, t) \cdot \dot{x}_i \right) + u(\vec{x}, t) g_0(\vec{x}, t) = 0$$

exakt ist. In diesem Fall nennt man die Funktion $u(\vec{x}, t)$ **integrierenden Faktor** und man kann die Differentialgleichung wieder auf eine holonome Gleichung zurückführen. Allerdings ist auch klar, daß nicht jede Differentialgleichung der obigen Form integrierbar ist. Liegt die Zwangsbedingung in der Form einer nicht-integrierbaren Differentialgleichung der obigen Form vor, so

handelt es sich um eine nicht-holonome Zwangsbedingung. Auch hierzu ist ein konkretes Beispiel hilfreich: Wir betrachten ein Rad, das sich auf der horizontalen xy -Ebene bewegt. Die Radebene sei hierbei stets vertikal. Wir können die Bewegung durch vier Koordinaten beschreiben: Wir haben die x - und die y -Koordinate des Radmittelpunktes, den Drehwinkel ϕ um die Radachse sowie die Orientierung der Radebene bezüglich der xy -Koordinaten. Hierfür verwenden wir den Winkel θ zwischen der Radebene und der x -Achse. Diese vier Koordinaten sind nicht unabhängig: Die Bewegung des Radmittelpunktes erfolgt in der Radebene. Es gilt

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y} &= v \sin \theta,\end{aligned}$$

wobei v die Geschwindigkeit des Radmittelpunktes darstellt. Nun ist aber

$$v = r\dot{\phi},$$

wobei r der Radius des Rades ist. Somit erhalten wir als Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned}\dot{x} - r\dot{\phi} \cos \theta &= 0, \\ \dot{y} - r\dot{\phi} \sin \theta &= 0.\end{aligned}$$

Diese beiden Differentialgleichungen lassen sich nicht integrieren (ohne die vollständige Lösung des Problems zu kennen).

Zwangsbedingungen werden weiterhin dahingehend unterschieden, ob sie zeitunabhängig sind oder die Zeit explizit enthalten. Sind sie zeitunabhängig, so spricht man von **skleronomen Zwangsbedingungen**. Enthalten sie die Zeit, so spricht man von **rheonomen Zwangsbedingungen**. Das folgende System von Gleichungen

$$f_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq r,$$

liefert also skleronome holonome Zwangsbedingungen.

Liegen Zwangsbedingungen vor, so sind zum einen nicht mehr alle Koordinaten voneinander unabhängig, da sie durch die Zwangsbedingungen miteinander verknüpft sind. Zum anderen sind die Zwangskräfte meistens nicht explizit gegeben, sondern nur durch ihre Wirkung auf die Bewegung des Systems bekannt.

Wir diskutieren nun holonome Zwangsbedingungen etwas genauer. Wir betrachten ein System mit $(3n)$ Koordinaten und r holonomen Zwangsbedingungen.

$$f_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq r,$$

Wir können diese Gleichungen verwenden, um r Koordinaten zu eliminieren. Es verbleiben also $(3n - r)$ unabhängige Koordinaten und wir sprechen von einem System mit $(3n - r)$ Freiheitsgraden. Es ist nicht notwendig, daß die $(3n - r)$ unabhängigen Koordinaten mit einer Teilmenge der ursprünglichen $(3n)$ Koordinaten übereinstimmen. Wir bezeichnen die unabhängigen Koordinaten nun mit

$$q_1, q_2, \dots, q_{3n-r}.$$

Die ursprünglichen Koordinaten lassen sich durch diese unabhängigen Koordinaten ausdrücken,

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{x}_1(q_1, \dots, q_{3n-r}, t), \\ \vec{x}_2 &= \vec{x}_2(q_1, \dots, q_{3n-r}, t), \\ &\dots \\ \vec{x}_n &= \vec{x}_n(q_1, \dots, q_{3n-r}, t),\end{aligned}$$

so daß diese Gleichungen die Zwangsbedingungen implizit enthalten. Wir bezeichnen die unabhängigen Koordinaten $q_1, q_2, \dots, q_{3n-r}$ als **generalisierte Koordinaten** oder auch als **verallgemeinerte Koordinaten**.

Die zeitlichen Ableitungen der generalisierten Koordinaten bezeichnen wir als **generalisierte Geschwindigkeiten**

$$\dot{q}_j = \frac{dq_j}{dt}.$$

Die ursprünglichen Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_i$ stehen mit den generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_j wie folgt in Beziehung:

$$\dot{\vec{x}}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \left(\sum_{j=1}^{3n-r} \frac{\partial \vec{x}_i(\vec{q}, t)}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j \right) + \frac{\partial \vec{x}_i(\vec{q}, t)}{\partial t}.$$

Beispiel: Wir betrachten ein Teilchen, daß sich nur auf der Kugeloberfläche

$$\vec{x}^2 = R^2$$

bewegen kann. Als generalisierte Koordinaten können wir den Polarwinkel θ und den Azimutwinkel φ verwenden. Die ursprünglichen Koordinaten x, y und z ergeben sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}x(\theta, \varphi) &= R \sin \theta \cos \varphi, \\ y(\theta, \varphi) &= R \sin \theta \sin \varphi, \\ z(\theta, \varphi) &= R \cos \theta.\end{aligned}$$

Die Zwangsbedingung ist dann automatisch erfüllt, wie man leicht zeigt:

$$\vec{x}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta = R^2.$$

Es ist weiter

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R(\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi), \\ \dot{y} &= R(\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi), \\ \dot{z} &= -R\dot{\theta} \sin \theta\end{aligned}$$

und

$$\dot{\vec{x}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2 [\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta].$$

3.5 Das d'Alembertsche Prinzip

Wir wollen nun eine zweite Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen betrachten. Diese basiert auf dem d'Alembertschen Prinzip der virtuellen Verrückungen. Bei dieser Herleitung betrachten wir nun auch die Verallgemeinerung auf Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen.

Wir betrachten ein System von n Teilchen mit den Ortkoordinaten $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$. Dieses System unterliege r unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen der Form

$$f_i(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Unter einer **virtuellen Verrückung** verstehen wir eine willkürliche infinitesimale Änderung der Koordinaten $\delta\vec{x}_i$ zu einem Zeitpunkt t , die mit den Kräften und den Zwangsbedingungen verträglich ist, die auf das System zu dem gegebenen Zeitpunkt t wirken.

Wir betrachten zunächst den Spezialfall eines statischen Zustands, d.h. das System ist im Gleichgewicht. In diesem Fall ist für ein jedes Teilchen die auf dieses Teilchen wirkende Gesamtkraft \vec{K}_i gleich Null:

$$\vec{K}_i = \vec{0}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Somit ist natürlich auch das Skalarprodukt aus \vec{K}_i und der virtuellen Verrückung $\delta\vec{x}_i$ gleich Null:

$$\vec{K}_i \cdot \delta\vec{x}_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Es bleibt auch Null, wenn wir nun über alle i summieren:

$$\sum_{i=1}^n \vec{K}_i \cdot \delta\vec{x}_i = 0.$$

Wir nehmen an, daß sich die Gesamtkraft \vec{K}_i , die auf das i -te Teilchen wirkt, als eine Summe einer Kraft \vec{F}_i , die wir explizit behandeln wollen und einer Zwangskraft \vec{Z}_i ergibt:

$$\vec{K}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i.$$

Die genaue Form der Zwangskräfte ist meistens nicht bekannt. Die verfügbare Information über die Zwangskräfte besteht darin, daß sie die Teilchen auf eine Bahn zwingen, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist. Unser Ziel ist daher, die Zwangskräfte zu eliminieren.

Betrachten wir nun die virtuellen Verrückungen. Per Definition sind dies Verrückungen, die mit den Zwangsbedingungen verträglich sind. Wir betrachten nun Systeme, für die die **virtuelle Arbeit der Zwangskräfte** verschwindet:

$$\sum_{i=1}^n \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{x}_i = 0.$$

Für konkrete Modelle läßt sich zeigen, daß dies für holonome Zwangsbedingungen immer dann der Fall ist, falls die Zwangsbedingungen keine Reibungskräfte hervorrufen. Wird ein Teilchen gezwungen, sich auf einer Fläche zu bewegen, so wirkt die Zwangskraft senkrecht zur Fläche, die Bewegung des Teilchens (und damit auch alle möglichen virtuellen Verrückungen) erfolgt jedoch tangential zur Fläche.

Mit der Annahme, daß die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet, erhalten wir nun im statischen Fall die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{x}_i = 0.$$

Wir gehen nun vom statischen Fall auf den allgemeinen dynamischen Fall über. Im Gegensatz zu $\vec{K}_i = \vec{0}$ gilt nun $\vec{K}_i = m_i \vec{a}_i$, oder

$$\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i = 0.$$

Wie zuvor können wir wieder das Skalarprodukt mit $\delta \vec{x}_i$ nehmen und über alle i summieren. Wir erhalten

$$\sum_{i=1}^n (\vec{K}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{x}_i = 0.$$

Setzen wir wieder $\vec{K}_i = \vec{F}_i + \vec{Z}_i$ und nehmen an, daß die virtuelle Arbeit der Zwangskräfte verschwindet, so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{x}_i = 0.$$

Diese Gleichung wird als das **d'Alembertsche Prinzip der virtuellen Verrückungen** bezeichnet. Die Zwangskräfte \vec{Z}_i treten in dieser Gleichung explizit nicht mehr auf.

Wir drücken nun die ursprünglichen $(3n)$ Koordinaten \vec{x}_i ($1 \leq i \leq n$) durch die $(3n - r)$ generalisierten Koordinaten q_j aus ($1 \leq j \leq 3n - r$).

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(q_1, \dots, q_{3n-r}, t).$$

Für die Geschwindigkeiten gilt

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{x}}_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \left(\sum_{j=1}^{3n-r} \frac{\partial \vec{x}_i(\vec{q}, t)}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j \right) + \frac{\partial \vec{x}_i(\vec{q}, t)}{\partial t}.$$

Leiten wir nochmal partiell nach \dot{q}_k ab, so erhalten wir

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_k}.$$

Diese Hilfsrelation werden wir später verwenden. Wir können auch die virtuellen Verrückungen der ursprünglichen Koordinaten $\delta\vec{x}_i$ durch die virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten δq_j ausdrücken. Es gilt

$$\delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Bemerkung: Es tritt hier keine Zeitableitung auf, da die virtuellen Verrückungen zu einer festen Zeit betrachtet werden. Somit folgt aus dem d'Alembertschen Prinzip

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta\vec{x}_i &= 0, \\ \sum_{j=1}^{3n-r} \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j &= 0. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j}$$

und bezeichnen Q_j als **generalisierter Kraft**. Somit erhalten wir für den ersten Term aus dem d'Alembertschen Prinzip

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} Q_j \delta q_j.$$

Wir manipulieren nun den zweiten Term aus dem d'Alembertschen Prinzip

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j} \delta q_j.$$

Nun ist aber

$$\ddot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{x}}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j}.$$

In der letzten Umformung haben wir $\partial\vec{x}_i/\partial q_j = \partial\vec{v}_i/\partial \dot{q}_j$ benutzt. Wir erhalten somit

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} \sum_{i=1}^n m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j} \right] \delta q_j.$$

Nun ist aber

$$\vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \vec{v}_i^2, \quad \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} \vec{v}_i^2,$$

und somit

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) \right] \delta q_j.$$

In anderen Worten

$$\sum_{i=1}^n \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{x}_i = \sum_{j=1}^{3n-r} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j.$$

Fügen wir nun alles zusammen, so können wir das d'Alembertsche Prinzip durch die virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten ausdrücken:

$$\sum_{j=1}^{3n-r} \left[Q_j - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j.$$

Da die virtuellen Verrückungen der generalisierten Koordinaten unabhängig sind folgt nun, daß jeder einzelne Term verschwinden muß:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad 1 \leq j \leq 3n-r.$$

Bemerkung: Die virtuellen Verrückungen $\delta \vec{x}_i$ der ursprünglichen Koordinaten sind im allgemeinen wegen der Zwangsbedingungen nicht unabhängig.

Wir betrachten nun nacheinander drei Fälle mit steigender Allgemeinheit.

1. Fall: Wir beginnen mit dem Fall, daß die Kräfte \vec{F}_i konservativ sind, sich also durch ein Potential $V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ darstellen lassen:

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

In diesem Fall erhalten wir für die generalisierten Kräfte

$$Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \sum_{i=1}^n \left[\vec{\nabla}_i V(\vec{x}_1(\vec{q}, t), \dots, \vec{x}_n(\vec{q}, t)) \right] \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial}{\partial q_j} V(\vec{q}, t),$$

wobei wir nun

$$V(\vec{q}, t) = V(\vec{x}_1(\vec{q}, t), \dots, \vec{x}_n(\vec{q}, t))$$

geschrieben haben. Setzen wir nun in

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0.$$

Da $V(\vec{q}, t)$ nicht von \dot{q}_j abhängt, können wir ebenso gut schreiben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0.$$

Setzt man nun

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T - V,$$

so erhält man die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

2. Fall: Wir werden ebenfalls auf die Euler-Lagrange-Gleichungen geführt, falls sich die generalisierten Kräfte aus einer Funktion $V(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ nach der Vorschrift

$$Q_j = -\frac{\partial V(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j}$$

berechnen lassen. Setzen wir wieder in

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

ein, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (T - V) - \frac{\partial}{\partial q_j} (T - V) = 0.$$

Auch hier wird man wieder mit der Definition

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = T - V$$

auf die Euler-Lagrange-Gleichungen geführt. Ein wichtiges Beispiel für diesen Fall haben wir bereits kennengelernt: Das verallgemeinerte Potential für die Lorentzkraft

$$V_{\text{Lorentz}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = q \left[\Phi(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) \right]$$

hängt von der Geschwindigkeit und der Zeit ab.

3. Fall: Wir betrachten abschliessend noch den Fall, daß zusätzlich zu den bereits diskutierten Kräften noch Kräfte auftreten, die nicht durch ein (verallgemeinertes) Potential beschrieben werden können. Dies ist zum Beispiel bei Reibungskräften der Fall. Reibungskräfte sind typischerweise proportional zu der Geschwindigkeit

$$Q_j = -\kappa_j \dot{q}_j,$$

wobei κ_j der Reibungskoeffizient in die Richtung der j -ten generalisierten Koordinate ist. Hier führt man nun eine **Dissipationsfunktion**

$$F(\dot{\vec{q}}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3n-r} \kappa_j \dot{q}_j^2.$$

Offensichtlich ist

$$Q_j = -\frac{\partial F(\dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_j}.$$

Die Potentialkräfte sollen wieder wie bisher durch das (verallgemeinerte) Potential V beschrieben werden. Setzt man wieder $L = T - V$, so daß die Lagrange-Funktion nur die Potentialkräfte berücksichtigt, so wird man auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

geführt. In diesem Fall kann das System nicht durch eine Lagrange-Funktion alleine beschrieben werden, man muß als eine zweite Funktion noch die Dissipationsfunktion angeben.

Wir fassen das Wichtigste für physikalische Systeme, die durch eine Lagrange-Funktion beschrieben werden können und die durch holonome Zwangsbedingungen eingeschränkt sind, noch einmal zusammen. Wir betrachten ein physikalisches System mit n Koordinaten $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ und r unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen

$$f_i(\vec{x}, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Die Lagrange-Funktion des Systems sei

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t).$$

Zur Lösung des Problems gehen wir wie folgt vor:

1. Wir wählen $(n-r)$ generalisierte Koordinaten q_j ($1 \leq j \leq n-r$) und drücken die ursprünglichen Koordinaten x_i durch die q_j aus:

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_{n-r}, t).$$

2. Wir ersetzen in der Lagrange-Funktion die ursprünglichen Koordinaten durch die generalisierten Koordinaten. Dies definiert eine Funktion $\tilde{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$.

$$\tilde{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{x}(\vec{q}, t), \dot{\vec{x}}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t), t).$$

Bemerkung: Oft schreibt man auch einfach $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ anstelle von $\tilde{L}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$.

3. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq n-r.$$

4. Wir lösen die Bewegungsgleichungen und erhalten

$$q_j = q_j(t).$$

5. Wir können die Bewegung auch in den ursprünglichen Koordinaten ausdrücken. Hierzu setzt man die Ausdrücke für $q_j(t)$ in $x_i(\vec{q}, t)$ ein. Man erhält

$$x_i(t) = x_i(q_1(t), \dots, q_{n-r}(t), t).$$

Bemerkung: Diese Euler-Lagrange-Gleichungen die bei dieser Methode auftreten werden auch als **Lagrange-Gleichungen der zweiten Art** bezeichnet. Wir werden Lagrange-Gleichungen der ersten Art im Zusammenhang mit einer alternativen Methode später noch kennenlernen.

Wir wollen diese Lösungsmethode nun an einem Beispiel diskutieren. Hierzu betrachten wir zwei Gewichte der Massen m_1 und m_2 , die über ein nicht dehnbare Seil und eine Rolle miteinander verbunden sind. Bewegt sich ein Gewicht nach unten, so bewegt sich das andere Gewicht nach oben. Das Seil soll über die Rolle reibungsfrei laufen. Wir bezeichnen mit x_1 die Höhe des Gewichtes 1, und mit x_2 die Höhe des Gewichtes 2. Wir wählen die Ausgangssituation so, daß beide Gewichte sich auf gleicher Höhe befinden und setzen

$$x_1(t=0) = x_2(t=0) = 0.$$

Desweiteren wollen wir

$$\dot{x}_1(t=0) = \dot{x}_2(t=0) = 0$$

annehmen. Offensichtlich liegt eine Zwangsbedingung vor, da nicht beide Gewichte unabhängig voneinander bewegt werden können. Geht ein Gewicht um ein Stück Δx nach unten, so geht das andere Gewicht um das Stück Δx nach oben. Wir können die Zwangsbedingung schreiben als

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Es handelt sich um eine holonome Zwangsbedingung. Die Lagrange-Funktion des Systems ist

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t) = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - m_1gx_1 - m_2gx_2.$$

Als generalisierte Koordinate können wir

$$q = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

wählen. Es ist dann

$$x_1 = q, \quad x_2 = -q$$

und

$$\dot{x}_1 = \dot{q}, \quad \dot{x}_2 = -\dot{q}.$$

Wir erhalten somit

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, -q, \dot{q}, -\dot{q}, t) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}^2 - (m_1 - m_2)gq.$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus der Euler-Lagrange-Gleichung und lautet

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} + (m_1 - m_2)g = 0,$$

bzw.

$$\ddot{q} = -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g.$$

Integration liefert

$$q(t) = -\frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt^2$$

und somit

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt^2, \quad x_2(t) = \frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}gt^2.$$

3.6 Lagrange-Multiplikatoren

Mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips konnten wir physikalische Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen behandeln. Es stellt sich nun die Frage, ob dies auch im Rahmen des Wirkungsprinzips möglich ist. Dies ist in der Tat der Fall. Hier nimmt man eine Technik zu Hilfe, die man als Lagrange-Multiplikatoren bezeichnet. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren hat darüberhinaus den Vorteil, daß sie uns auch erlaubt, die Zwangskräfte zu berechnen.

Wir betrachten ein physikalisches System mit n Koordinaten $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ und r unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen

$$f_i(\vec{x}, t) = 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Die Lagrange-Funktion des Systems sei

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t).$$

Wir führen nun r Funktionen $\lambda_j(t)$ ($1 \leq j \leq r$) ein und fassen diese r Funktionen zu einem Vektor $\vec{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t))^T$ zusammen. Wir betrachten nun die wie folgt modifizierte Lagrange-Funktion:

$$\hat{L}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \dot{\vec{x}}, t) = L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) f_j(\vec{x}, t),$$

sowie die dazu gehörige Wirkung

$$\hat{S}[\vec{x}, \vec{\lambda}] = \int_{t_a}^{t_b} dt \hat{L}(\vec{x}, \vec{\lambda}, \dot{\vec{x}}, t).$$

Die Funktionen $\lambda_j(t)$ bezeichnet man als **Lagrange-Multiplikatoren**. Variiert man die Wirkung nach δx_i , so findet man

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dies sind insgesamt n Differentialgleichungen. Wir können darüberhinaus auch nach $\delta \lambda_j$ variieren und erhalten

$$f_j(\vec{x}, t) = 0, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Dies sind genau die r ursprünglichen Zwangsbedingungen. Wir haben also nun insgesamt $n + r$ Gleichungen für die $n + r$ unbekanntenen Größen $x_1(t), \dots, x_n(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$. Löst man dieses (Differential-) Gleichungssystem, so findet man die Bahnen $x_i(t)$ sowie die Lösungen $\lambda_j(t)$ für die Lagrange-Multiplikatoren. Die Lösungen für die Lagrange-Multiplikatoren sind interessant, da aus ihnen die Zwangskräfte berechnet werden können. Die Zwangskraft in Richtung der i -ten Koordinate ist gegeben durch

$$Z_i = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i}.$$

Das System der Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, & 1 \leq i \leq n, \\ f_j(\vec{x}, t) &= 0, & 1 \leq j \leq r \end{aligned}$$

wird auch als System der **Lagrange-Gleichungen der ersten Art** bezeichnet.

Zur Herleitung dieser Form betrachten wir zunächst einen Satz aus der Mathematik über die Lagrange-Multiplikatoren. Dieser Satz behandelt zunächst nur eine Funktion $l(\vec{x})$, die von den Ortskoordinaten, aber nicht von den Geschwindigkeiten und der Zeit abhängt. Wir werden die Verallgemeinerung auf eine geschwindigkeits- und zeitabhängige Funktion $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ im Anschluss behandeln.

Sei $l(\vec{x})$ eine Funktion von n Koordinaten. Wir betrachten diese Funktion auf der Untermannigfaltigkeit, die durch r unabhängigen Nebenbedingungen der Form

$$f_j(\vec{x}) = 0, \quad 1 \leq j \leq r,$$

definiert ist. Diese Untermannigfaltigkeit hat die Dimension $(n - r)$. Wir interessieren uns für die Punkte der Untermannigfaltigkeit, in denen die Funktion $l(\vec{x})$ ein Extremum hat.

Behauptung: Für einen solchen Punkt gibt es Konstanten λ_j , so daß

$$\frac{\partial l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0.$$

Beweis: Wir betrachten die ersten $(n - r)$ -Koordinaten als unabhängig und drücken die restlichen r Koordinaten durch die unabhängigen Koordinaten aus:

$$x_s = x_s(x_1, \dots, x_{n-r}), \quad n - r < s \leq n.$$

Dann ist

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^r \frac{\partial f_j}{\partial x_{n-r+s}} \frac{\partial x_{n-r+s}}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq (n - r), \quad 1 \leq j \leq r,$$

Die $(r \times r)$ -Matrix

$$M_{js} = \frac{\partial f_j}{\partial x_{n-r+s}}$$

hat Rang r (da die Nebenbedingungen unabhängig sein sollen), und ist daher invertierbar. Wir können die obige Gleichung daher nach $\partial x_{n-r+s} / \partial x_i$ auflösen:

$$\frac{\partial x_{n-r+s}}{\partial x_i} = - \sum_{j=1}^r M_{sj}^{-1} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

Da l ein Extremum haben soll, gilt natürlich auch

$$\frac{\partial l}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^r \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}} \frac{\partial x_{n-r+s}}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq (n - r).$$

Setzen wir nun

$$\lambda_j = - \sum_{s=1}^r \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}} M_{sj}^{-1},$$

so erhält man

$$\frac{\partial l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq (n-r).$$

Man zeigt dann, dass diese Aussage auch für die restlichen $(n-r+1) \leq i \leq n$ trivialerweise gilt. So ist für $1 \leq s \leq r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}} + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_{n-r+s}} &= \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}} - \sum_{s'=1}^r \sum_{j=1}^r \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s'}} M_{s'j}^{-1} M_{js} = \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}} - \sum_{s'=1}^r \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s'}} \delta_{s's} \\ &= \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}} - \frac{\partial l}{\partial x_{n-r+s}} = 0. \end{aligned}$$

Somit gilt sie für alle i und wir haben

$$\frac{\partial l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

womit die Behauptung bewiesen wäre.

Wir betrachten nun Verallgemeinerungen dieses Satzes. Als erstes betrachten wir den Fall, daß sowohl die Funktion $l(\vec{x}, t)$ als auch die Nebenbedingungen $f_j(\vec{x}, t) = 0$ von einem zusätzlichen Parameter t abhängen. Dann gilt der obige Satz natürlich für jeden festen Wert t , wir finden also für ein festes t immer Werte $\lambda_j(t)$, so daß

$$\frac{\partial l(\vec{x}, t)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Im allgemeinen sind die Werte $\lambda_j(t)$ für unterschiedliche Parameterwerte t unterschiedlich. Aus den Konstanten λ_j werden also Funktionen $\lambda_j(t)$, die von dem Parameter t abhängen. Wir können diese Gleichungen auch als

$$\left(\frac{\partial l(\vec{x}, t)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \right) \delta x_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

schreiben. Dies ist nicht anderes als die Variation von

$$\hat{s}[\vec{x}, \vec{\lambda}] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(l(\vec{x}, t) + \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) f_j(\vec{x}, t) \right)$$

bezüglich δx_i .

Als zweite Verallgemeinerung betrachten wir nun den Fall, daß wir die Funktion $l(\vec{x}, t)$ durch

$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ ersetzen. $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$ darf nun auch von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}$ abhängen. In der Variation der Wirkung

$$\hat{S}[\vec{x}, \vec{\lambda}] = \int_{t_a}^{t_b} dt \left(L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) + \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) f_j(\vec{x}, t) \right)$$

tritt nun auch die Variation der Geschwindigkeit $\delta \dot{x}_i$ auf. Mittels partieller Integration und unter der Annahme, daß die Variation zu der Anfangs- und Endzeit verschwindet können wir dies wieder auf eine Variation der Ortskoordinaten zurückführen. Wir erhalten

$$\frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_i} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} \right) + \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Somit haben wir also bewiesen, daß die ersten n Gleichungen der $(n+r)$ Lagrange-Gleichungen der ersten Art die behauptete Form haben. Die restlichen r Gleichungen sind trivialerweise korrekt, da sie genau die r Zwangsbedingungen darstellen.

Wir müssen noch zeigen, daß die Zwangskräfte durch

$$Z_i = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i}$$

gegeben sind. Dies geht am einfachsten, indem man die Äquivalenz der Lagrange-Gleichungen der ersten Art mit dem d'Alembertschen Prinzip betrachtet: Wir hatten bei der Diskussion des d'Alembertschen Prinzips die Gesamtkraft K_i in eine Kraft F_i , welche wir explizit behandeln wollen, und eine Zwangskraft Z_i zerlegt:

$$K_i = F_i + Z_i.$$

Nun können wir natürlich auch die Zwangskräfte (anstelle sie zu eliminieren) weiterhin explizit beibehalten. Wiederholt man dann die Rechenschritte des Abschnitts über das d'Alembertsche Prinzip, so findet man nun

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial T}{\partial x_i} = K_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Nehmen wir nun wie bisher an, daß sich die Kräfte F_i aus einer Lagrange-Funktion ergeben ($F_i = -\partial V / \partial x_i$), so läßt sich diese Gleichung umformen zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Z_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Der Vergleich mit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

liefert

$$Z_i = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) \frac{\partial f_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i}.$$

Wir haben somit eine zweite Methode kennengelernt, physikalische Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen zu behandeln. Diese Methode hat den Vorteil, daß sie auch die Zwangskräfte liefert.

Als Beispiel diskutieren wir wieder den Fall zweier Gewichte, die über ein Seil und eine Rolle verbunden sind. Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2.$$

Es liegt eine holonome Zwangsbedingung vor,

$$x_1 + x_2 = 0,$$

daher benötigen wir einen Lagrange-Multiplikator. Wir erhalten

$$\hat{L}(x_1, x_2, \lambda, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - m_1 g x_1 - m_2 g x_2 + \lambda (x_1 + x_2).$$

Die Variationen nach x_1 , x_2 und λ liefern das folgende System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + m_1 g - \lambda &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + m_2 g - \lambda &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Zur Lösung dieses Systems eliminiert man zunächst λ aus den ersten beiden Gleichungen, und dann aus der resultierenden Gleichung x_2 mit Hilfe der dritten Gleichung. Man findet wieder

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + (m_1 - m_2) g = 0.$$

Somit erhält man

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2, \quad x_2(t) = \frac{1}{2} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2, \quad \lambda(t) = 2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g.$$

Somit sind die Zwangskräfte

$$\begin{aligned} Z_1 &= \lambda(t) \frac{\partial (x_1 + x_2)}{\partial x_1} = \lambda(t) = 2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g, \\ Z_2 &= \lambda(t) \frac{\partial (x_1 + x_2)}{\partial x_2} = \lambda(t) = 2 \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} g. \end{aligned}$$

3.7 Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen

Wir können die Überlegungen des letzten Abschnitts auch auf Systeme mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen erweitern, falls die (nicht-holonomen) Zwangsbedingungen von der Form

$$\left(\sum_{i=1}^n g_{ji}(\vec{x}, t) \cdot \dot{x}_i \right) + g_{j0}(\vec{x}, t) = 0.$$

sind. \vec{x} ist hierbei ein n -dimensionaler Vektor. Holonome Zwangsbedingungen sind ein Spezialfall der obigen Form: Aus

$$f_j(\vec{x}, t) = 0$$

folgt

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_j(\vec{x}, t)}{\partial x_i} \cdot \dot{x}_i \right) + \frac{\partial f_j(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0.$$

Gehen wir nochmal den Beweis der Methode der Lagrange-Multiplikatoren mit holonomen Zwangsbedingungen durch, so sehen wir, daß in den Euler-Lagrange-Gleichungen nur die Ableitungen $\partial f_j / \partial x_i$ auftreten. Die Funktionen f_j (ohne Ableitungen) haben wir nur in der Wirkung benötigt. Verzichten wir nun darauf, eine Wirkung angeben zu können und beschränken wir uns von vorneherein darauf, ein physikalisches System nur durch Euler-Lagrange-Gleichungen zu wollen, so können wir ein System mit nicht-holonomen Zwangsbedingungen wie folgt behandeln:

Gegeben seien eine Lagrange-Funktion $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$, wobei \vec{x} ein n -dimensionaler Vektor ist, und r nicht-holonome Zwangsbedingungen der Form

$$\left(\sum_{i=1}^n g_{ji}(\vec{x}, t) \cdot \dot{x}_i \right) + g_{j0}(\vec{x}, t) = 0, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Hierbei habe die $(r \times n)$ -Matrix g_{ji} den Rank r . Die Dynamik des Systems ist gegeben durch die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) g_{ji}(\vec{x}, t), \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$\left(\sum_{i=1}^n g_{ji}(\vec{x}, t) \cdot \dot{x}_i \right) + g_{j0}(\vec{x}, t) = 0, \quad 1 \leq j \leq r.$$

Dies ist ein System von $(n+r)$ Differentialgleichungen für die $(n+r)$ unbekanntenen Größen $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, $\lambda_1(t)$, ..., $\lambda_r(t)$. Die Zwangskräfte sind gegeben durch

$$Z_i = \sum_{j=1}^r \lambda_j(t) g_{ji}(\vec{x}, t).$$

3.8 Systeme mit isoperimetrischen Zwangsbedingungen

Das klassische isoperimetrische Problem fragt nach der Form einer geschlossenen Kurve, so daß bei fester Länge L der Kurve die eingeschlossene Fläche maximal ist. Die Lösung für das klassische Problem ist die Kreislinie.

Verallgemeinert haben wir die folgende Problemstellung: Gesucht ist eine Funktion $\vec{x}(t)$, so daß

$$S[\vec{x}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t)$$

extremal wird unter der Nebenbedingung

$$K[\vec{x}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt G(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = C,$$

wobei C eine Konstante ist. Wie zuvor, soll für den Anfangs- und Endpunkt gelten

$$\vec{x}(t_a) = \vec{x}_a, \quad \vec{x}(t_b) = \vec{x}_b.$$

Im Gegensatz zu Systemen mit holonomen Zwangsbedingungen verlangen wir nicht, daß für jedes t die gesuchte Funktion $\vec{x}(t)$ eine Bedingung $f(\vec{x}, t) = 0$ erfüllt. Wir verlangen nur die schwächere Bedingung, daß ein Funktional von $\vec{x}(t)$ die Bedingung $K[\vec{x}(t)] = C$ erfüllt.

Bemerkung: Setzen wir

$$\tilde{K}[\vec{x}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt \tilde{G}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t), \quad \tilde{G}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = G(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) - \frac{C}{t_b - t_a},$$

so ist

$$K[\vec{x}(t)] = C \Leftrightarrow \tilde{K}[\vec{x}(t)] = 0.$$

Wir können das Problem also immer so formulieren, daß auf der rechten Seite eine Null steht. In der Praxis verwendet man allerdings häufig die Form $K[\vec{x}(t)] = C$.

Zur Lösung betrachten wir

$$\begin{aligned} \hat{L}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t, \lambda) &= L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) + \lambda G(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t), \\ \hat{S}[\vec{x}(t), \lambda] &= \int_{t_a}^{t_b} dt \hat{L}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t, \lambda) \end{aligned}$$

und bestimmen $\vec{x}(t)$ so, daß $\hat{S}[\vec{x}(t), \lambda]$ extremal ist: Dies führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial x_i} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichungen hängt im Allgemeinen von dem Lagrange-Multiplikator λ ab. Hat man die Lösung $\vec{x}(t)$ als Funktion von λ , so setzt man $\vec{x}(t)$ in das Funktional $K[\vec{x}(t)]$ ein und bestimmt λ aus der Bedingung

$$K[\vec{x}(t)] = C.$$

Der Beweis, daß die Variation von $\hat{S}[\vec{x}(t), \lambda]$ zur gesuchten Lösung führt, verläuft ähnlich wie im holonomen Fall.

Bemerkung: Im Gegensatz zu Systemen mit holonomen Zwangsbedingungen ist für Systeme mit isoperimetrischen Zwangsbedingungen λ eine Konstante und keine Funktion $\lambda(t)$.

Verallgemeinerung: Liegen mehrere isoperimetrische Zwangsbedingungen vor

$$K_i[\vec{x}(t)] = \int_{t_a}^{t_b} dt G_i(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) = C_i, \quad 1 \leq i \leq r,$$

so verwendet man r Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und betrachtet

$$\hat{L}(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t, \lambda_1, \dots, \lambda_r) = L(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t) + \sum_{i=1}^r \lambda_i G_i(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t), t).$$

3.9 Erhaltungsgrößen und das Noether-Theorem

Wir haben bisher diskutiert, wie man Systeme, die durch eine Lagrange-Funktion beschrieben werden und die gegebenen Zwangsbedingungen unterliegen, behandelt. Liegen holonome Zwangsbedingungen vor, so kann man entweder zuerst zu generalisierten Koordinaten übergehen und wird dann auf die Lagrange-Gleichungen der zweiten Art geführt. Alternativ kann man auch Lagrange-Multiplikatoren einführen und die Lagrange-Gleichungen erster Art lösen. In beiden Fällen hat man es mit Differentialgleichungen zu tun, die man als Euler-Lagrange-Gleichungen aus einer Lagrange-Funktion enthält.

Wir können nun ganz abstrakt ein System mit n Freiheitsgraden betrachten. Jedem Freiheitsgrad entspricht eine generalisierte Koordinate q_i ($1 \leq i \leq n$). Das System werde durch die Lagrange-Funktion

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

beschrieben. Die Euler-Lagrange-Gleichungen hierzu lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Wir wollen nun untersuchen, wie wir Symmetrieeigenschaften der Lagrange-Funktion ausnützen können, um das Lösen der Differentialgleichungen zu vereinfachen.

3.9.1 Eichinvarianz

Es sei $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ eine Lagrange-Funktion und $\Lambda(\vec{q}, t)$ eine Funktion, die von den generalisierten Koordinaten \vec{q} und der Zeit t , aber nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$ abhängt. Wir betrachten die modifizierte Lagrange-Funktion

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt} \Lambda(\vec{q}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Lambda(\vec{q}, t)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \Lambda(\vec{q}, t)}{\partial t},$$

die man erhält, indem man zu L die totale Zeitableitung von $\Lambda(\vec{q}, t)$ addiert. Die Lagrange-Funktion L' führt auf die gleichen Euler-Lagrange-Gleichungen wie die Lagrange-Funktion L . Dies sieht man durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} &= \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Lambda(\vec{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Lambda(\vec{q}, t)}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \Lambda(\vec{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \Lambda(\vec{q}, t)}{\partial t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda(\vec{q}, t)}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \Lambda(\vec{q}, t) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Man bezeichnet die Transformation von L auf L' als eine **Eichtransformation**. Zu beachten ist, daß die Eichfunktion $\Lambda(\vec{q}, t)$ nicht von $\dot{\vec{q}}$ abhängen darf.

Wir fassen zusammen: Eine Eichtransformation ändert die Bewegungsgleichungen nicht.

3.9.2 Koordinatentransformationen

Wir betrachten nun allgemeine Koordinatentransformationen. Hierunter verstehen wir eine Koordinatentransformation

$$q'_i = f_i(\vec{q}, t) \quad 1 \leq i \leq n,$$

die eindeutig und umkehrbar ist und die darüberhinaus die Eigenschaft hat, daß sowohl f_i als auch die Umkehrabbildungen

$$q_j = f_j^{-1}(\vec{q}', t)$$

differenzierbar sind. Diese Transformationen werden auch als Diffeomorphismen bezeichnet. Die Koordinatentransformation definiert die transformierte Lagrange-Funktion

$$L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(q_1(\vec{q}', t), \dots, q_n(\vec{q}', t), \dot{q}_1(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t), \dots, \dot{q}_n(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t), t),$$

wobei

$$\begin{aligned} q_i(\vec{q}', t) &= f_i^{-1}(\vec{q}', t), \\ \dot{q}_i(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i^{-1}(\vec{q}', t)}{\partial q'_j} \dot{q}'_j + \frac{\partial f_i^{-1}(\vec{q}', t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Für eine solche Koordinatentransformation gilt: Ist $\vec{q}'(t)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen zu $L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)$, so ist $\vec{q}(t)$ mit

$$q_j(t) = f_j^{-1}(\vec{q}'(t), t)$$

eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen zu $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$. Um diese Aussage zu beweisen, geht man von den Euler-Lagrange-Gleichungen der Lagrange-Funktion L' aus und geht dann zu den Variablen \vec{q} über. Nützt man aus, daß die Matrix

$$\frac{\partial f_i^{-1}}{\partial q'_j}$$

invertierbar ist, so findet man die Euler-Lagrange-Gleichungen der Lagrange-Funktion L . (Die obige Matrix ist invertierbar, da nach Voraussetzung die Koordinatentransformation eindeutig und umkehrbar ist.) Im Detail haben wir: Ausgehend von

$$L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}(\vec{q}', t), \dot{\vec{q}}(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t), t)$$

betrachten wir zunächst

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}'_j} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \right) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}'_j} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \right].$$

Hierbei haben wir

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}'_j} = \frac{\partial q_i}{\partial q'_j}$$

verwendet, diese Beziehung folgt aus

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i(\vec{q}', t) = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \dot{q}'_j \right) + \frac{\partial q_i}{\partial t}.$$

Weiter betrachten wir

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_j} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q'_j} \right].$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j} - \frac{\partial L'}{\partial q'_j} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}'_j} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q'_j} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \frac{\partial q_i}{\partial q'_j}, \end{aligned}$$

und, da wir $\partial q_i / \partial q'_j$ als invertierbar vorausgesetzt haben, die Behauptung.

Bemerkung: Im allgemeinen haben die Lagrange-Funktionen $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ und $L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)$ verschiedene Gestalt. Durch eine geschickte Wahl der Transformation kann man unter Umständen erreichen, daß $L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)$ eine besonders einfache Form hat.

Wir bezeichnen die Lagrange-Funktion als **invariant** bezüglich der Koordinatentransformation, falls $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)$ gilt. Hierzu äquivalent ist die Bedingung $L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$. Die Gleichwertigkeit dieser beiden Bedingungen sieht man wie folgt: Da per Definition $L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ ist, folgt aus

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

die Beziehung

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t).$$

Benennt man nun die Variablen um, so erhält man

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t).$$

3.9.3 Autonome Systeme

Wir betrachten nun den Fall, daß die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, die Lagrange-Funktion sei also nur eine Funktion der Orte \vec{q} und der Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$:

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}).$$

Diese Situation tritt auf, falls die Kräfte konservativ sind und sich aus einem Potential ableiten lassen. In diesem Fall haben wir

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = T(\dot{\vec{q}}) - V(\vec{q}).$$

Falls die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt, bezeichnen wir sie als **autonom**. Für eine autonome Lagrange-Funktion gilt, daß die Größe

$$E = \left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{d}{dt}E = 0.$$

Zum Beweis berechnen wir dE/dt :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial q_i} \right)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in den Klammern entspricht der linken Seite der Euler-Lagrange-Gleichungen und ist daher gleich Null. Somit gilt

$$E = \text{const},$$

oder anders ausgedrückt

$$\left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}})}{\partial \dot{q}_i} \right) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \text{const}.$$

Wir bezeichnen diesen Ausdruck als ein **erstes Integral**. Allgemein versteht man unter einem ersten Integral zu einem physikalischen System, daß durch die Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ beschrieben wird, eine Beziehung der Form

$$f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \text{const}.$$

Zu einem gegebenen physikalischen System kann es mehrere erste Integrale geben.

Die Bezeichnung “erstes Integral” wird verständlich, wenn wir nochmal das Brachistochronenproblem betrachten. Dieses Problem wird durch die Lagrange-Funktion

$$L(z, z', x) = \frac{\sqrt{1 + (z')^2}}{\sqrt{-2gz}}$$

beschrieben. Die Variable x entspricht hierbei der Zeit. Die Euler-Lagrange-Gleichungen haben uns auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$2zz'' + (z')^2 + 1 = 0$$

geführt. Bei der Lösung dieser Differentialgleichung haben wir einen Trick verwendet und anstelle der Differentialgleichung zweiter Ordnung die einfachere Differentialgleichung erster Ordnung

$$z(1 + (z')^2) = \text{const}$$

gelöst.

Wie kommt man auf diese Differentialgleichung erster Ordnung ? Wir haben nun alle Voraussetzungen beieinander, um diese Differentialgleichung herzuleiten. Der Ausgangspunkt ist die Tatsache, daß die Lagrange-Funktion für das Brachistochronenproblem nicht explizit von der "Zeit"-Variablen t abhängt. Es handelt sich also um eine autonome Lagrange-Funktion. Somit gilt

$$z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L = \text{const.}$$

Berechnet man die linke Seite, so findet man

$$z' \frac{\partial L}{\partial z'} - L = - \frac{1}{\sqrt{-2gz(1 + (z')^2)}}.$$

Hieraus folgt dann

$$z(1 + (z')^2) = \text{const.}$$

Da dies eine Differentialgleichung erster Ordnung ist, muß man um die Lösung zu erhalten einmal integrieren. Gegenüber der ursprünglichen Differentialgleichung zweiter Ordnung (welche zwei Integrationen benötigt), wurde hier eine Integration schon ausgeführt. Man spricht daher von einem ersten Integral.

3.9.4 Zyklische Variablen

Wir betrachten wieder ein physikalisches System, welches durch eine Lagrange-Funktion

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

beschrieben wird. Wir bezeichnen die Größe

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

als den der Koordinate q_i zugeordneten **generalisierten Impuls**. Die Bezeichnungen **kanonischer Impuls** oder **konjugierter Impuls** werden ebenfalls für p_i verwendet.

Bemerkung 1: Die Größe p_i hat nicht notwendigerweise die Dimension eines Impulses. Dies kann zum Beispiel dann der Fall sein, falls die Koordinate q_i nicht einer kartesischen Koordinate entspricht, sondern zum Beispiel eine Winkelgröße darstellt.

Bemerkung 2: Liegt ein geschwindigkeitsabhängiges Potential vor, dann entspricht der zu einer kartesischen Koordinate q_i gehörende kanonische Impuls p_i nicht dem üblichen mechanischen Impuls. Das Standardbeispiel hierfür ist ein Teilchen im elektromagnetischen Feld. Das Teilchen wird durch die Lagrange-Funktion

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q\Phi(\vec{x}, t) + \frac{q}{c}\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t).$$

beschrieben. Der kanonische Impuls lautet

$$\vec{p}_{\text{kanonisch}} = m\dot{\vec{x}} + \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{x}, t),$$

der mechanische Impuls dagegen

$$\vec{p}_{\text{mechanisch}} = m\dot{\vec{x}}.$$

Definition: Enthält die Lagrange-Funktion nicht die generalisierte Koordinate q_i , so bezeichnen wir diese Variable als **zyklisch**.

Bemerkung: Die Lagrange-Funktion darf bei einer zyklischen Variable q_i die generalisierte Geschwindigkeit \dot{q}_i enthalten.

Die Bedeutung von zyklischen Variablen liegt darin, daß sie uns immer auf erste Integrale führen. Es gilt der folgende Satz: Ist die Variable q_i zyklisch, so ist der zu dieser Variable konjugierte Impuls erhalten:

$$p_i = \text{const.}$$

Der Beweis ist sehr einfach: Ist die Variable q_i zyklisch, so bedeutet dies

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Somit reduziert sich die i -te Euler-Lagrange-Gleichung auf

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Dies ist nichts anderes als die Aussage

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.}$$

Die linke Seite entspricht allerdings genau der Definition des kanonischen Impulses, also

$$p_i = \text{const.}$$

3.9.5 Das Noether-Theorem

Wir betrachten nun den Zusammenhang zwischen Koordinatentransformationen, die die Lagrange-Funktion invariant lassen und Erhaltungsgrößen. Dies führt uns auf das Noether-Theorem.

Wir betrachten eine Familie von Koordinatentransformationen, die von einem reellen Parameter α abhängen.

$$q'_i = f_i(\vec{q}, t, \alpha), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Die Funktionen f_i seien auch bezüglich α stetig differenzierbar. Weiter gelte, daß $\alpha = 0$ der Identität entspricht:

$$q_i = f_i(\vec{q}, t, 0), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Gibt es nun ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $|\alpha| < \varepsilon$

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt} \Lambda(\vec{q}, t, \alpha) + O(\alpha^2)$$

gilt, wobei

$$\Lambda(\vec{q}, t, 0) = 0,$$

so folgt, daß die Größe

$$I = \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Dies ist das Noethertheorem. Es besagt, daß jede kontinuierliche Symmetrie, unter der sich die Lagrange-Funktion nicht ändert, auf einen Erhaltungssatz führt.

Bemerkung 1: Das Noether-Theorem macht nur eine Aussage über kontinuierliche Symmetrien, die sich kontinuierlich in die Identität überführen lassen. (Dies wird durch die Forderung, daß die Koordinatentransformation für $\alpha = 0$ der Identität entspricht, sichergestellt.) Das Noether-Theorem macht keine Aussage über diskrete Symmetrien der Lagrange-Funktion.

Bemerkung 2: Es wird nur gefordert, daß die Lagrange-Funktion bis auf eine Eichtransformation invariant ist. Wir haben schon gesehen, daß Eichtransformationen die Euler-Lagrange-Gleichungen nicht ändern und daher zwei Lagrange-Funktionen, die bis auf eine Eichtransformation identisch sind, die gleiche Physik beschreiben.

Auch wird nur gefordert, daß die Koordinatentransformation die Lagrange-Funktion bis auf eine Eichtransformation in führender Ordnung in α invariant läßt. Ein Term $O(\alpha)$ tritt also nicht auf. Terme der Ordnung α^2 dürfen dagegen auftreten. Dies läßt sich auch anders formulieren: Die Lagrange-Funktion ist invariant bis auf Eichtransformationen unter den infinitesimalen Koordinatentransformationen.

Wir kommen nun zum Beweis des Noether-Theorems: Zunächst gilt wegen $\Lambda(\vec{q}, t, 0) = 0$

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)|_{\alpha=0} = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t).$$

Da nach Voraussetzung

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{q}, t, \alpha) = O(\alpha^2)$$

gilt, folgt

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{q}, t, \alpha) \right] \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Nun ist $q'_i = f_i(\vec{q}, t, \alpha)$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}{\partial q'_i} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}{\partial \dot{q}'_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} f_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}{\partial \dot{q}'_i} \right) \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}{\partial \dot{q}'_i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} f_i \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}{\partial \dot{q}'_i} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha}, \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die Euler-Lagrange-Gleichung verwendet wurde. Somit ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{q}, t, \alpha) \right] \right|_{\alpha=0} &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt}\Lambda \right] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}{\partial \dot{q}'_i} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{d}{dt}\Lambda \right] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}{\partial \dot{q}'_i} \Big|_{\alpha=0} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right]. \end{aligned}$$

Nun folgt aus $L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)|_{\alpha=0} = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$

$$\frac{\partial L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)}{\partial \dot{q}'_i} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} = p_i,$$

und somit

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right] = 0,$$

womit die Behauptung

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \text{const}$$

bewiesen wäre.

Bemerkung: Wir können das Noether-Theorem noch etwas verallgemeinern, indem wir nicht nur Koordinatentransformationen betrachten, sondern nun auch Transformationen, die die Zeit mittransformieren. Wir betrachten also Transformationen der Form

$$\begin{aligned} t' &= f_0(t, \alpha), \\ q'_i &= f_i(\vec{q}, t, \alpha), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

f_0 und f_i seien bezüglich α stetig differenzierbar und wie zuvor sollen sich die Transformationen für $\alpha = 0$ auf die Identität reduzieren:

$$\begin{aligned} t &= f_0(t, 0), \\ q_i &= f_i(\vec{q}, t, 0), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Schreibweise

$$\dot{q}'_i = \frac{dq'_i}{dt'}.$$

Gibt es nun ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $|\alpha| < \varepsilon$

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t') dt' = \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt} \Lambda(\vec{q}, t, \alpha) \right] dt + O(\alpha^2)$$

bzw.

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t') \frac{dt'}{dt} = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt} \Lambda(\vec{q}, t, \alpha) + O(\alpha^2)$$

gilt, wobei wieder $\Lambda(\vec{q}, t, 0) = 0$ ist, so folgt, daß die Größe

$$I = \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \left[\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) - L \right] \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

erhalten ist.

Bemerkung: Da nun auch die Zeit transformiert wird, ist im allgemeinen dt' ungleich dt und es tritt auf der linken Seite der Jacobi-Faktor dt'/dt auf.

Der Beweis verläuft im wesentlichen analog zum obigen Fall, in denen nur die Koordinaten

q_i transformiert werden. Da nun auch die Zeit transformiert wird ergeben sich einige kleine Komplikationen. Wir benötigen die Ausdrücke \dot{q}'_i und dt'/dt . Es ist

$$t' = f_0(t, \alpha) = t + \left. \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \cdot \alpha + O(\alpha^2),$$

$$q'_i = f_i(\vec{q}, t, \alpha) = q_i + \left. \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \cdot \alpha + O(\alpha^2)$$

und somit

$$\dot{q}'_i = \frac{dq'_i}{dt'} = \frac{\frac{dq'_i}{dt}}{\frac{dt'}{dt}} = \frac{\dot{q}_i + \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \cdot \alpha}{1 + \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \cdot \alpha} + O(\alpha^2) = \dot{q}_i + \alpha \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} + O(\alpha^2),$$

$$\frac{dt'}{dt} = 1 + \alpha \left. \frac{d}{dt} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + O(\alpha^2).$$

Außerdem benötigt man die Identität

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - L \right] = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Diese Identität beweist man wie folgt:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - L \right] = \sum_{i=1}^n \left[\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{\frac{\partial L}{\partial q_i}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] - \frac{\partial L}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t}.$$

Verwendet man diese Hilfsrelationen, so folgt die Behauptung ohne große Mühe.

Wir wollen nun einige Beispiele für das Noether-Theorem betrachten.

Beispiel 1: Autonome Systeme

Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängt. Wir betrachten die folgende Transformation

$$t' = t + \alpha,$$

$$q'_i = q_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

d.h. wir führen eine Zeittranslation durch und lassen alle Ortskoordinaten unverändert. Für $\alpha = 0$ reduziert sich die Transformation auf die Identität. Es ist

$$\frac{dt'}{dt} = 1$$

und da L nicht explizit von der Zeit abhängen soll, gilt

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t).$$

Somit ist $\Lambda(\vec{q}, t, \alpha) = 0$. Wir haben außerdem

$$\frac{\partial f_0}{\partial \alpha} = 1, \quad \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = 0.$$

Damit lautet die Erhaltungsgröße

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) - L = \text{const.}$$

Dies entspricht der Energieerhaltung, die wir schon im Rahmen der autonomen Systeme diskutiert haben. Wir sehen also mit Hilfe des Noether-Theorems, daß aus der Invarianz der Lagrange-Funktion unter Zeittranslationen die Energieerhaltung folgt.

Beispiel 2: Zyklische Variablen

Wir betrachten nun den Fall, daß eine Variable q_j zyklisch ist. Wir können nun die folgende Koordinatentransformation betrachten:

$$\begin{aligned} q'_j &= q_j + \alpha, \\ q'_i &= q_i, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Die Zeitvariable wird hier nicht transformiert. Offensichtlich reduziert sich die Koordinatentransformation für $\alpha = 0$ auf $q'_i = q_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Es gilt außerdem stets $\dot{q}'_i = \dot{q}_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Da nach Voraussetzung die Variable q_j zyklisch sein soll, gilt

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t).$$

Wir können somit das Noether-Theorem anwenden. Es ist $\Lambda(\vec{q}, t, \alpha) = 0$ und

$$\frac{\partial f_i}{\partial \alpha} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Somit ist die Erhaltungsgröße

$$\left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = p_j = \text{const.}$$

Wie im Abschnitt über zyklische Variablen finden wir auch mit Hilfe des Noether-Theorems, daß der zu der Variablen q_j konjugierte Impuls p_j erhalten ist. Wir können diesen Sachverhalt auch wie folgt formulieren: Ist eine Variable q_j zyklisch (d.h. die Lagrange-Funktion L hängt nicht explizit von q_j ab), so ist die Lagrange-Funktion invariant unter einer Translation $q'_j = q_j + \alpha$

bezüglich der j -ten Koordinate. Diese Invarianz und das Noether-Theorem implizieren eine Erhaltungsgröße: Der zu q_j konjugierte Impuls ist erhalten.

Dies zeigt den engen Zusammenhang zwischen einer Symmetrie der Lagrange-Funktion (hier Translationsinvarianz bezüglich der j -ten Koordinate) und der daraus resultierenden Erhaltungsgröße (hier der konjugierte Impuls p_j).

Sind in einer Lagrange-Funktion mehrere Koordinaten zyklisch, so gibt es zu jeder zyklischen Koordinate eine Erhaltungsgröße. Für r zyklische Koordinaten hat man also r Erhaltungsgrößen und somit r erste Integrale.

Beispiel 3: Rotationssymmetrie

Betrachten wir nun den Fall eines Teilchens in einem Zentralpotential. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(|\vec{x}|),$$

wobei das Potential nur vom Abstand zum Ursprung abhängt. Wir betrachten nun die Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Zeitvariable wird nicht transformiert. Diese Transformation beschreibt eine Drehung um die z -Achse um den Winkel α . Die Transformationsmatrix R ist orthogonal:

$$R^T \cdot R = \mathbf{1}.$$

Nun rechnet man leicht nach, daß

$$(\vec{x}')^2 = (R \cdot \vec{x})^2 = \vec{x}^T \cdot R^T \cdot R \cdot \vec{x} = \vec{x}^T \cdot \vec{x} = \vec{x}^2,$$

und

$$(\dot{\vec{x}}')^2 = (R \cdot \dot{\vec{x}})^2 = \dot{\vec{x}}^T \cdot R^T \cdot R \cdot \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}^T \cdot \dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}^2$$

ist. Die Lagrange-Funktion ist somit invariant unter dieser Transformation:

$$L(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) = L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t).$$

Es ist

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = mv_x,$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = mv_y,$$

und

$$\begin{aligned}x' &= f_x(\vec{x}, t, \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \\y' &= f_y(\vec{x}, t, \alpha) = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.\end{aligned}$$

Für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial f_x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha \Big|_{\alpha=0} = y, \\ \left. \frac{\partial f_y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= -x \cos \alpha - y \sin \alpha \Big|_{\alpha=0} = -x.\end{aligned}$$

Somit lautet die Erhaltungsgröße, die aus dem Noether-Theorem folgt:

$$p_x \left. \frac{\partial f_x}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + p_y \left. \frac{\partial f_y}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = mv_x y - mv_y x = -m(xv_y - yv_x).$$

Dies ist nichts anderes als die negative z -Komponente des Drehimpulses. Ist $(-L_z)$ erhalten, so ist natürlich auch L_z erhalten.

Wir können diese Betrachtung natürlich auch für eine Drehung um die x -Achse bzw. um die y -Achse wiederholen. In diesen Fällen würden wir dann das Ergebnis erhalten, daß die x - bzw. y -Komponente des Drehimpulses erhalten ist.

Wir sehen also, daß die Invarianz der Lagrange-Funktion unter Drehungen die Erhaltung des Drehimpulses bewirkt.

Beispiel 4: Transformation in ein um eine konstante Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem. Wir betrachten ein abgeschlossenes n -Teilchensystem, in dem die wechselseitigen Kräfte nur vom Abstand zwischen den Teilchen abhängen. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n, t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n V_{ij}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|).$$

Wir wissen bereits, daß in diesem System die Energie, der Gesamtimpuls und der Gesamtdrehimpuls erhalten ist. Wir betrachten nun die folgende Transformation:

$$\begin{aligned}x'_i &= x_i + \alpha t, & 1 \leq i \leq n, \\y'_i &= y_i, \\z'_i &= z_i.\end{aligned}$$

Für die Geschwindigkeiten gilt dann

$$\begin{aligned}\dot{x}'_i &= \dot{x}_i + \alpha, & 1 \leq i \leq n, \\ \dot{y}'_i &= \dot{y}_i,\end{aligned}$$

$$\dot{z}'_i = \dot{z}_i.$$

Diese Transformation läßt die Potentiale invariant, da diese nur vom Abstand zweier Teilchen abhängen. Für die Lagrange-Funktion gilt

$$\begin{aligned} L(\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_n, \dot{\vec{x}}'_1, \dots, \dot{\vec{x}}'_n, t) &= L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n, t) + \sum_{i=1}^n \left(m_i \dot{x}_i \alpha + \frac{1}{2} m_i \alpha^2 \right) \\ &= L(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \dot{\vec{x}}_1, \dots, \dot{\vec{x}}_n, t) + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \left(x_i \alpha + \frac{1}{2} \alpha^2 t \right). \end{aligned}$$

Die Lagrange-Funktion ist also bis auf eine Eichtransformation invariant. Als Erhaltungsgröße finden wir nun

$$\sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i t - x_i).$$

Betrachten wir die analogen Transformationen, in denen wir die x -Koordinaten durch die y - bzw. z -Koordinaten ersetzen, und kombinieren wir dann alle Resultate, so ergibt sich, daß die Größe

$$\sum_{i=1}^n m_i (\dot{\vec{x}}_i t - \vec{x}_i)$$

erhalten ist. Mit der Bezeichnung \vec{P} für den Gesamtimpuls, \vec{X} für den Schwerpunkt und M für die Gesamtmasse lautet die Erhaltungsgröße

$$\vec{P}t - M\vec{X} = \text{const.}$$

Da wir schon wissen, daß der Gesamtimpuls ebenfalls erhalten ist, gilt für die Schwerpunktsbewegung

$$\vec{X} = \frac{1}{M} \vec{P}t + \vec{X}_0.$$

Der Symmetrie (bis auf eine Eichtransformation) der Lagrange-Funktion unter Transformationen auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem entspricht also die Erhaltungsgröße \vec{X}_0 .

Damit haben wir nun zu den zehn kontinuierlichen Symmetrien der Galileigruppe (Zeittranslation, Orttranslation, Drehungen im Ortsraum, Transformation auf ein mit konstanter Geschwindigkeit bewegtes Bezugssystem) die entsprechenden Erhaltungsgrößen bestimmt: Energieerhaltung, Impulserhaltung, Drehimpulserhaltung, Erhaltung von \vec{X}_0 .

Fassen wir also nochmal alles zusammen: Im allgemeinsten Fall betrachten wir eine Transformation der generalisierten Koordinaten und der Zeit

$$t' = f_0(t, \alpha),$$

$$q'_i = f_i(\vec{q}, t, \alpha), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Gilt

$$L(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t') dt' = \left[L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt} \Lambda(\vec{q}, t, \alpha) \right] dt + O(\alpha^2)$$

so folgt, daß die Größe

$$I = \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} - \left[\left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) - L \right] \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}$$

erhalten ist.

Wird die Zeit nicht transformiert, so reduziert sich diese Formel auf

$$I = \left(\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) - \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}.$$

Gilt darüberhinaus, daß die Lagrange-Funktion exakt invariant unter der Transformation ist, also die Eichfunktion $\Lambda(\vec{q}, t, \alpha)$ gleich Null ist, so reduziert sich der Ausdruck der Erhaltungsgröße weiter auf

$$I = \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0}.$$

4 Der Hamilton-Formalismus

Wir haben nun zum einen bereits die klassische Mechanik in der Formulierung nach Newton kennengelernt, in der die Bewegungsgleichungen durch

$$m\ddot{x}_i = \vec{F}_i$$

gegeben sind. Darüberhinaus haben wir in den vorherigen Abschnitten eingehend die Formulierung der klassischen Mechanik nach Lagrange diskutiert. Im Lagrange-Formalismus wird ein physikalisches System durch eine Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ beschrieben. Die Bewegungsgleichungen sind durch die Euler-Lagrange-Gleichungen gegeben und lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Der Lagrange-Formalismus erlaubt es uns, Systeme mit Zwangsbedingungen zu behandeln. Desweiteren haben wir das Noether-Theorem betrachtet, das besagt, daß aus einer kontinuierlichen Symmetrie der Lagrange-Funktion eine Erhaltungsgröße folgt.

Wir wollen nun die klassische Mechanik in einer dritten Formulierung diskutieren und wenden uns nun dem Hamilton-Formalismus zu. Es stellt sich am Anfang natürlich die Frage, welche Berechtigung eine weitere Formulierung der klassischen Mechanik hat. Die Antwort liegt darin, daß wir im Hamilton-Formalismus Strukturen kennenlernen werden, die für die Quantenmechanik sehr wichtig sind.

Wir wollen zunächst die wichtigsten Punkte des Hamilton-Formalismus kurz erwähnen, bevor wir sie eingehend diskutieren. Wir haben bereits im Lagrange-Formalismus für den Fall, daß die Lagrange-Funktion weder explizit von der Zeit noch explizit von den generalisierten Koordinaten q_i abhängt, gesehen, daß die Energie und die kanonisch konjugierten Impulse erhalten sind. Es stellt sich heraus, daß auch in dem Fall, daß diese Größen keine Erhaltungsgrößen sind, es sinnvoll ist, diese Größen für die Beschreibung eines physikalischen Systems zu verwenden. Im Hamilton-Formalismus verwendet man daher anstelle der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_i die kanonisch konjugierten Impulse p_i . Diese waren durch

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

definiert. Die generalisierten Geschwindigkeiten betrachten wir nun als Funktion $\dot{q}_i = \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$. Ein physikalisches System wird nun nicht mehr durch eine Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, welche von den generalisierten Koordinaten, den generalisierten Geschwindigkeiten und der Zeit abhängt, beschrieben, sondern durch eine Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$, welche nun von den generalisierten Koordinaten, den generalisierten Impulsen und der Zeit abhängt. Der Zusammenhang zwischen Hamilton-Funktion und Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i \right) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t), \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t),$$

wobei die generalisierten Geschwindigkeiten implizit durch die Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

definiert sind.

Bemerkung: Hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit ab, so ist der Wert der Hamilton-Funktion für die physikalische Lösung gleich der (erhaltenen) Energie.

Die Bewegungsgleichungen im Hamilton-Formalismus lauten dann

$$\frac{d}{dt}q_i = \frac{\partial}{\partial p_i}H(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad \frac{d}{dt}p_i = -\frac{\partial}{\partial q_i}H(\vec{q}, \vec{p}, t).$$

Wir wollen nun diese Aussagen eingehender betrachten.

4.1 Implizite Funktionen

Wir beginnen mit einigen mathematischen Vorbetrachtungen. Es seien $U \subseteq \mathbb{R}$ und $V \subset \mathbb{R}$ offene Teilmengen und

$$G : U \times V \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow G(x, y),$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Gilt für $(x_0, y_0) \in U \times V$

$$G(x_0, y_0) = 0$$

und ist

$$\left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0,$$

so gibt es offene Umgebungen $U' \subset U$ und $V' \subset V$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Abbildung

$$f : U' \rightarrow V', \\ x \rightarrow f(x),$$

mit $f(x_0) = y_0$, so daß

$$G(x, f(x)) = 0$$

für alle $x \in U'$ gilt. Man sagt, daß die Funktion $f(x)$ durch $G(x, y) = 0$ **implizit** definiert wird.

Bemerkung: Dieser Satz macht eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion $f(x)$. Er ist besonders dann hilfreich, wenn die Gleichung $G(x,y) = 0$ nicht nach y aufgelöst werden kann.

Für die Ableitung $f'(x)$ gilt

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}} \bigg|_{(x,f(x))},$$

wie man leicht durch Anwenden der Kettenregel auf $G(x, f(x))$ sieht:

$$\frac{d}{dx}G(x, f(x)) = \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}f'(x)$$

Da $G(x, f(x)) = 0$ gilt natürlich trivialerweise auch

$$\frac{d}{dx}G(x, f(x)) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist

$$\frac{\partial G}{\partial y} \bigg|_{(x_0, y_0)} \neq 0,$$

und aufgrund der Stetigkeit der Ableitung ist diese Ableitung auch in einer Umgebung dieses Punktes ungleich Null. Somit kann man nach $f'(x)$ auflösen.

Wir können den Satz über implizite Funktionen auch auf mehrere Variablen verallgemeinern. Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen

$$\begin{aligned} \vec{G} &: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^m \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\rightarrow \vec{G}(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned}$$

eine stetig differenzierbare Abbildung.

Bemerkung: Die Dimension des Wertebereichs von \vec{G} ist gleich der Dimension von V .

Die Jacobi-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n} & \frac{\partial G_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

besteht aus zwei Teilmatrizen

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{y}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial G_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial G_m}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

wobei die letztere eine quadratische $m \times m$ -Matrix ist.

Gilt für $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in U \times V$

$$\vec{G}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$$

und ist

$$\left(\det \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{y}} \right) \Big|_{(\vec{x}_0, \vec{y}_0)} \neq 0,$$

so gibt es offene Umgebungen $U' \subset U$ und $V' \subset V$ und eine eindeutige stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{aligned} \vec{f} &: U' \rightarrow V', \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{f}(\vec{x}), \end{aligned}$$

mit $\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$, so daß

$$\vec{G}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0}$$

für alle $\vec{x} \in U'$ gilt. Für die Ableitung gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = - \left(\frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{y}} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{x}} \Big|_{(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x}))}.$$

4.2 Legendre-Transformationen

Wir beginnen wieder mit einem einfachen ein-dimensionalen Beispiel. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} f &: U \rightarrow \mathbb{R}, \\ u &\rightarrow f(u) \end{aligned}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Für $u_0 \in U$ sei

$$f''(u_0) \neq 0.$$

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$F : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}, \\ (v, u) \rightarrow F(v, u) = vu - f(u),$$

und deren Ableitung nach u , die wir mit G bezeichnen wollen:

$$G : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}, \\ (v, u) \rightarrow G(v, u) = v - f'(u).$$

Im Punkte $(v_0, u_0) = (f'(u_0), u_0)$ gilt

$$G(f'(u_0), u_0) = 0, \\ \left. \frac{\partial G}{\partial u} \right|_{(f'(u_0), u_0)} = -f''(u_0) \neq 0.$$

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt. Der Satz über implizite Funktionen garantiert, daß es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}$ mit $f'(u_0) \in V$ und eine eindeutig bestimmte Funktion

$$u : V \rightarrow \mathbb{R}, \\ v \rightarrow u(v),$$

gibt, mit

$$G(v, u(v)) = 0.$$

Setzen wir die Funktion $u(v)$ in die Funktion $F(v, u)$, die von zwei Variablen abhängt, ein, so definiert dies eine neue Funktion $g(v)$ einer Variablen v

$$g : V \rightarrow \mathbb{R}, \\ v \rightarrow g(v) = F(v, u(v)) = vu(v) - f(u(v)),$$

die wir als **Legendre-Transformierte** der Funktion $f(u)$ bezeichnen.

Betrachten wir hierzu ein einfaches Beispiel. Um den Kontakt mit der Physik herzustellen, ersetzen wir die Variable u durch die Variable \dot{q} sowie die Variable v durch die Variable p . Wir betrachten die Funktion

$$L(\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2,$$

wobei wir $m \neq 0$ voraussetzen. Die Funktion $L(\dot{q})$ entspricht der Funktion $f(u)$. Es ist

$$\frac{d^2}{d\dot{q}^2}L = m \neq 0.$$

Die Funktion $F(p, \dot{q})$ ist gegeben durch

$$F(p, \dot{q}) = p\dot{q} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2,$$

und die Funktion $G(p, \dot{q})$ ist gegeben durch

$$G(p, \dot{q}) = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} = p - m\dot{q}.$$

In diesem Beispiel können wir die Gleichung

$$G(p, \dot{q}) = 0$$

nach \dot{q} auflösen und erhalten

$$\dot{q}(p) = \frac{p}{m}.$$

Dies eingesetzt in $F(p, \dot{q})$ liefert die Legendre-Transformierte von $L(\dot{q})$, die wir mit $H(p)$ bezeichnen:

$$H(p) = F(p, \dot{q}(p)) = p\dot{q}(p) - \frac{1}{2}m[\dot{q}(p)]^2 = p \cdot \frac{p}{m} - \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}.$$

Betrachten wir nun wieder eine Funktion $f(u)$ und deren Legendre-Transformierte $g(v)$. Nach Voraussetzung ist $f''(u_0) \neq 0$. Was gilt nun für $g''(v_0)$, wobei $v_0 = f'(u_0)$ ist? Aus

$$g(v) = vu(v) - f(u(v))$$

folgt

$$g'(v) = u(v) + vu'(v) - f'(u(v))u'(v) = u(v) + u'(v) \underbrace{[v - f'(u(v))]}_{=0} = u(v)$$

und

$$g''(v) = u'(v).$$

Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt aber mit $G(v, u) = v - f'(u)$

$$u'(v_0) = - \frac{\frac{\partial G}{\partial v}}{\frac{\partial G}{\partial u}} \Bigg|_{(v_0, u_0)} = - \frac{1}{(-f''(u_0))} = \frac{1}{f''(u_0)}.$$

Nach Voraussetzung ist $f''(u_0) \neq 0$ und somit

$$g''(v_0) = \frac{1}{f''(u_0)} \neq 0.$$

Somit können wir nun auch die Legendre-Transformierte von $g(v)$ betrachten. Die Hilfsfunktionen lauten

$$\begin{aligned}\tilde{F}(u, v) &= uv - g(v), \\ \tilde{G}(u, v) &= u - g'(v).\end{aligned}$$

Wir bestimmen $v(u)$ aus der Gleichung

$$u - g'(v) = 0.$$

Nun haben wir oben aber bereits gezeigt, daß $g'(v) = u(v)$ ist. Somit erfüllt $v(u)$ die Gleichung

$$u - u(v(u)) = 0.$$

In anderen Worten

$$u(v(u)) = u.$$

Die Legendre-Transformierte $\tilde{f}(u)$ von $g(v)$ ist nun

$$\begin{aligned}\tilde{f}(u) &= u \cdot v(u) - g(v(u)) \\ &= u \cdot v(u) - [v(u) \cdot u(v(u)) - f(u(v(u)))] \\ &= v(u) \cdot \underbrace{[u - u(v(u))]}_{=0} + f(u(v(u))) \\ &= f(u).\end{aligned}$$

Wir erhalten also wieder die ursprüngliche Funktion $f(u)$ zurück.

Wir können auch die Legendre-Transformierte einer Funktion von mehreren Variablen betrachten. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned}f &: U \rightarrow \mathbb{R}, \\ \vec{u} &\rightarrow f(\vec{u})\end{aligned}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der Variablen $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$. Wir fordern nun, daß für $\vec{u}_0 \in U$ die Determinante der Hesseschen Matrix nicht verschwindet:

$$\det \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right) \Big|_{\vec{u}_0} \neq 0.$$

Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned}F &: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}, \\ (\vec{v}, \vec{u}) &\rightarrow F(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u} - f(\vec{u}) = \left(\sum_{i=1}^n v_i u_i \right) - f(\vec{u}),\end{aligned}$$

und deren Ableitungen nach den Variablen u_i , die wir mit \vec{G} bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned}\vec{G} &: \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ (\vec{v}, \vec{u}) &\rightarrow G(\vec{v}, \vec{u}) = \nabla_{\vec{u}} F(\vec{v}, \vec{u}).\end{aligned}$$

Für die i -te Komponente von \vec{G} gilt

$$G_i(\vec{v}, \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial u_i} F(\vec{v}, \vec{u}) = v_i - \frac{\partial f(\vec{u})}{\partial u_i}.$$

Im Punkte $(\vec{v}_0, \vec{u}_0) = ((\nabla_{\vec{u}} f)(\vec{u}_0), \vec{u}_0)$ gilt

$$\begin{aligned}\vec{G}(\vec{v}_0, \vec{u}_0) &= 0, & \vec{v}_0 &= (\nabla_{\vec{u}} f)(\vec{u}_0) \\ \left. \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{u}} \right|_{(\vec{v}_0, \vec{u}_0)} &= - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j} \right) \Big|_{(\vec{v}_0, \vec{u}_0)}\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die Determinante der Hesseschen Matrix ungleich Null. Somit sind wieder die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt und es gibt daher eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v}_0 \in V$ sowie eine eindeutig bestimmte Funktion

$$\begin{aligned}\vec{u} &: V \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ \vec{v} &\rightarrow \vec{u}(\vec{v}),\end{aligned}$$

die

$$\vec{G}(\vec{v}, \vec{u}(\vec{v})) = \vec{0}$$

erfüllt. Die Legendre-Transformierte $g(\vec{v})$ der Funktion $f(\vec{u})$ wird analog zum Fall einer Variablen als

$$\begin{aligned}g &: V \rightarrow \mathbb{R}, \\ \vec{v} &\rightarrow g(\vec{v}) = F(\vec{v}, \vec{u}(\vec{v})) = \vec{v} \cdot \vec{u}(\vec{v}) - f(\vec{u}(\vec{v}))\end{aligned}$$

definiert. Auch für die Funktion $g(\vec{v})$ gilt, daß eine nochmalige Legendre-Transformation wieder auf die ursprüngliche Funktion $f(\vec{u})$ zurückführt.

4.3 Die Hamilton-Funktion

Wir wenden nun die Legendre-Transformation in mehreren Variablen auf ein Beispiel aus der Physik an. Wir ersetzen wieder die Variablen \vec{u} durch die Variablen \vec{q} und die Variablen \vec{v} durch die Variablen \vec{p} . Wir betrachten nun zu der Funktion

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

die Legendre-Transformierte bezüglich der Variablen $\dot{\vec{q}}$. Es ist hierbei zu beachten, daß die Variablen \vec{q} und t **nicht transformiert** werden, und daher einfach als zusätzliche Parameter zu

betrachten sind. Wir setzen weiter voraus, daß die Determinante der zweiten Ableitungen von L bezüglich der Variablen \dot{q}_i nicht verschwindet, d.h.

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0.$$

Ist die Lagrange-Funktion von der Form

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 \right) - V(\vec{q})$$

und $m_i \neq 0$, so ist diese Bedingung stets erfüllt, wie man leicht sieht:

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) = \det \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n m_i.$$

Die Hilfsfunktion F lautet nun

$$F(\vec{p}, \dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t).$$

Bemerkung: Die zusätzlichen Variablen \vec{q} und t kann man als zusätzliche Parameter betrachten. Die Ableitungen von F nach den Variablen \dot{q}_i bezeichnen wir als G_i :

$$G_i(\vec{p}, \dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = p_i - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t).$$

Die n Gleichungen

$$G_i(\vec{p}, \dot{\vec{q}}, \vec{q}, t) = 0$$

definieren nun mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen die Geschwindigkeiten als Funktion der konjugierten Impulse:

$$\dot{\vec{q}} = \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t).$$

Diese Lösungen eingesetzt in die Hilfsfunktion F liefert die Legendre-Transformierte der Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ bezüglich der Variablen $\dot{\vec{q}}$:

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t), t).$$

Wir bezeichnen die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ bezüglich der Variablen $\dot{\vec{q}}$ als **Hamilton-Funktion** und schreiben hierfür $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$.

Bemerkung: Um in der Praxis die Geschwindigkeiten als Funktion der konjugierten Impulse zu erhalten, müssen wir die n Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$$

nach den Variablen \dot{q}_j auflösen.

Bemerkung 2: Hängt die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit ab, und setzen wir für die Orts- und Impulsvariablen die physikalischen Bahnen $\vec{q}(t)$ und $\vec{p}(t)$ ein, so liefert die Hamilton-Funktion die erhaltenen Gesamtenergie des Systems.

Wir betrachten als ein einfaches Beispiel das Zweikörpersystem. Zwei Körper der Massen m_1 und m_2 wechselwirken mittels der Gravitationskraft. Den Ortsvektor der Masse m_1 bezeichnen wir mit \vec{x}_1 , den Ortsvektor der Masse m_2 mit \vec{x}_2 . Die Geschwindigkeiten bezeichnen wir mit $\dot{\vec{x}}_1$ und $\dot{\vec{x}}_2$. Die Lagrange-Funktion dieses Systems ist gegeben durch

$$L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1, \dot{\vec{x}}_2, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{x}}_2^2 + G \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}.$$

Die Hamilton-Funktion ist die Legendre-Transformierte bezüglich den Variablen $\dot{\vec{x}}_1$ und $\dot{\vec{x}}_2$. Als erstes müssen wir die Geschwindigkeiten durch die konjugierten Impulse ausdrücken. Dazu lösen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_1} = m_1 \dot{\vec{x}}_1, \\ \vec{p}_2 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_2} = m_2 \dot{\vec{x}}_2 \end{aligned}$$

nach den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{x}}_1$ und $\dot{\vec{x}}_2$ auf. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_1 &= \frac{1}{m_1} \vec{p}_1, \\ \dot{\vec{x}}_2 &= \frac{1}{m_2} \vec{p}_2. \end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion ergibt sich somit zu

$$\begin{aligned} H(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2, t) &= \vec{p}_1 \cdot \dot{\vec{x}}_1(\vec{p}_1) + \vec{p}_2 \cdot \dot{\vec{x}}_2(\vec{p}_2) - L(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dot{\vec{x}}_1(\vec{p}_1), \dot{\vec{x}}_2(\vec{p}_2), t) \\ &= \frac{\vec{p}_1^2}{m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{m_2} - \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} - \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \\ &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir betrachten noch die Eindeutigkeit der Hamilton-Funktion. Wir wissen bereits, daß die Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems nicht eindeutig ist. Wir können zum

Beispiel immer eine Eichtransformation durchführen und erhalten eine modifizierte Lagrange-Funktion

$$L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) + \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{q}, t).$$

Die Lagrange-Funktionen L und L' beschreiben die gleiche Physik. Da die Eichfunktion $\Lambda(\vec{q}, t)$ nicht von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$ abhängt, überträgt sich dieser Sachverhalt auf die Hamilton-Funktion. Wir bezeichnen die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ bezüglich der Variablen $\dot{\vec{q}}$ mit $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$, und die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion $L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ mit $H'(\vec{q}, \vec{p}', t)$. Für \vec{p} und \vec{p}' gilt

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad p'_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i},$$

und somit

$$p'_i = p_i + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i}.$$

Die Gleichungen $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ definieren implizit die Funktionen

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t),$$

die Gleichungen $p'_i - \partial \Lambda / \partial \dot{q}_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ definieren implizit die Funktionen

$$\dot{q}'_i = \dot{q}'_i(\vec{q}, \vec{p}', t) = \dot{q}_i\left(\vec{q}, \vec{p}' - \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\vec{q}}}, t\right) = \dot{q}_i(\vec{q}, \vec{p}, t).$$

Für H' und H finden wir den Zusammenhang

$$\begin{aligned} H'(\vec{q}, \vec{p}', t) &= \vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - L'(\vec{q}, \dot{\vec{q}}', t) = \left(\vec{p} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\vec{q}}}\right) \cdot \dot{\vec{q}} - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) - \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{q}, t) \\ &= H(\vec{q}, \vec{p}, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{d}{dt}\Lambda(\vec{q}, t) = H(\vec{q}, \vec{p}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\vec{q}, t). \end{aligned}$$

Somit ist auch die Hamilton-Funktion nicht eindeutig. Dies sieht man am einfachsten indem man beispielsweise $\Lambda(\vec{q}, t) = E_0 t$ wählt. Dann ist $p'_i = p_i$ und $H' = H - E_0$.

4.4 Die Hamilton-Gleichungen

Wir haben nun einem physikalischen System eine Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ zugeordnet, die von den verallgemeinerten Ortskoordinaten, den verallgemeinerten Impulsen und der Zeit abhängt. Es stellt sich nun die Frage, ob aus der Kenntniss der Hamilton-Funktion auch die Bewegungsgleichungen abgeleitet werden können. Diese Frage wollen wir nun genauer untersuchen.

Der Ausgangspunkt ist die Hamilton-Funktion

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t), t),$$

wobei $\dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ aus den Gleichungen

$$p_i = \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

bestimmt wird.

Betrachten wir zunächst $\partial H / \partial p_i$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}_i(\vec{p}, \vec{q}, t) + \left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t), t)}{\partial p_i} \\ &= \dot{q}_i(\vec{p}, \vec{q}, t) + \left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial p_i} \right) - \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial p_i} \right) \\ &= \dot{q}_i(\vec{p}, \vec{q}, t) + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left(p_j - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial p_i}}_{=0} \\ &= \dot{q}_i(\vec{p}, \vec{q}, t). \end{aligned}$$

Für die physikalische Bahn ist natürlich

$$\dot{q}_i(\vec{p}, \vec{q}, t) = \frac{d}{dt} q_i(t),$$

und somit erhalten wir einen ersten Satz von n Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_i} &= \left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t), t)}{\partial q_i} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_i} - \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial q_i} \right) \\ &= -\frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_i} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \left(p_j - \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{\partial \dot{q}_j(\vec{p}, \vec{q}, t)}{\partial q_i}}_{=0} \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{d}{dt} p_i.$$

Hierbei haben wir als Kurzschreibweise die Notation verwendet

$$\frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_i} = \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_i} \Bigg|_{\dot{\vec{q}}=\dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t)}, \quad \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \Bigg|_{\dot{\vec{q}}=\dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t)}.$$

In der letzten Zeile haben wir die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i}$$

ausgenutzt. Somit erhalten wir einen zweiten Satz von n Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Fassen wir zusammen: Aus der Hamilton-Funktion folgen $(2n)$ Differentialgleichungen erster Ordnung, die durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \frac{d}{dt} p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}$$

gegeben sind. Diese sind zu den n Euler-Lagrange-Gleichungen zweiter Ordnung äquivalent und stellen die Bewegungsgleichungen des Systems im Hamilton-Formalismus dar. Man bezeichnet die obigen $(2n)$ Differentialgleichungen erster Ordnung als die kanonischen Hamilton-Gleichungen oder auch kurz einfach als **Hamilton-Gleichungen**.

Bemerkung: Man beachte das Minuszeichen im zweiten Satz der Hamilton-Gleichungen $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$.

Betrachten wir ein Beispiel: Die Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators in einer Dimension lautet

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2.$$

Der kanonische Impuls ergibt sich zu

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}$$

und somit lautet die Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2.$$

Aus dieser Hamilton-Funktion folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \\ \frac{d}{dt}p &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2 q.\end{aligned}$$

Dies ist ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen erster Ordnung, daß mit den Standardmethoden gelöst werden kann.

Die Hamilton-Formulierung der Mechanik ist besonders dann vorteilhaft, wenn alle Variablen q_i zyklisch sind, d.h. die Lagrange-Funktion L hängt nur von den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{q}}$ und der Zeit t ab, aber nicht von den Ortskoordinaten \vec{q} . In diesem Fall wissen wir bereits, daß dann die konjugierten Impulse p_i erhalten sind, d.h.

$$\frac{d}{dt}p_i = 0.$$

In diesem Fall reduzieren sich daher die Bewegungsgleichungen auf einen Satz von n Differentialgleichungen erster Ordnung. Im Hamilton-Formalismus sind diese Gleichungen durch

$$\frac{d}{dt}q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

gegeben.

Bemerkung: Die Hamilton-Gleichungen lassen sich auch aus einem Variationsprinzip ableiten, indem wir die Funktion

$$F(\vec{q}, \vec{p}, \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{p}}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

betrachten, und fordern daß die Variation

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} dt F(\vec{q}(t), \vec{p}(t), \dot{\vec{q}}(t), \dot{\vec{p}}(t), t) = 0$$

für Bahnen mit

$$\delta \vec{q}(t_a) = \delta \vec{q}(t_b) = 0$$

verschwindet.

Die Funktion F hängt nicht von $\dot{\vec{p}}$ ab, wir haben diese Variablen nur wegen der Symmetrie bezüglich der Variablen \vec{q} und \vec{p} mithinzugeschrieben.

Es wird nicht gefordert, daß $\delta \vec{p}(t_a) = \delta \vec{p}(t_b) = 0$ gelten soll. Wir werden sehen, daß die Hamilton-Gleichungen ohne diese Forderung hergeleitet werden können. Der technische Grund hierfür

liegt in der Tatsache, daß wir bezüglich den Variablen \vec{p} nicht partiell integrieren müssen. Im Rahmen der Variationsrechnung betrachten wir Bahnen zwischen dem Anfangspunkt $\vec{q}(t_a) = \vec{q}_a$ und dem Endpunkt $\vec{q}(t_b) = \vec{q}_b$. Die Randbedingungen \vec{q}_a und \vec{q}_b definieren bereits $(2n)$ Integrationskonstanten, so daß für $\vec{p}(t_a)$ und $\vec{p}(t_b)$ keine Wahlfreiheit mehr besteht.

Wir berechnen nun die Variation der obigen Größe. Es ist

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_a}^{t_b} dt F(\vec{q}(t), \vec{p}(t), \dot{\vec{q}}(t), \dot{\vec{p}}(t), t) &= \int_{t_a}^{t_b} dt \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \right] \end{aligned}$$

Da die Variationen δq_i und δp_i unabhängig sind, folgt daß

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = 0$$

gelten muß. Nun ist aber wegen $F = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} p_i, \\ \frac{\partial F}{\partial p_i} &= \dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned}$$

Somit erhält man die Hamilton-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

4.5 Kanonische Transformationen

Wir haben im Abschnitt über den Lagrange-Formalismus bereits allgemeine Koordinatentransformationen kennengelernt. Starten wir von einem Satz Koordinaten \vec{q} mit der dazugehörigen Lagrange-Funktion $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$, so wird die Dynamik des Systems durch die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

beschrieben.

Wir können allerdings auch andere Koordinaten \vec{q}' verwenden, die sich aus den alten Koordinaten \vec{q} durch eine allgemeine Koordinatentransformation

$$q'_i = q'_i(\vec{q}, t)$$

ergeben. Eine allgemeine Koordinatentransformation wird auch als **Punkttransformation** bezeichnet. Die Lagrange-Funktion ausgedrückt in den neuen Koordinaten bezeichnen wir mit $L'(\vec{q}', \dot{\vec{q}}', t)$ und die Dynamik des Systems wird nun durch die Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} - \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = 0$$

beschrieben. Die Tatsache, daß die Bewegungsgleichungen in den gestrichenen und ungestrichenen Größen identisch sind, bezeichnet man als **Forminvarianz**.

Bemerkung: Im allgemeinen sind L und L' als Funktionen ihrer Argumente nicht identisch, d.h. im allgemeinen ist $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \neq L'(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t)$.

Wir können nun den analogen Sachverhalt in der Hamilton-Formulierung betrachten. Der Ausgangspunkt ist nun ein physikalisches System, daß durch eine Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ beschrieben wird. Die Bewegungsgleichungen für dieses System in den Variablen \vec{q} und \vec{p} lauten

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Wir bezeichnen eine Transformation

$$\begin{aligned} q'_i &= q'_i(\vec{q}, \vec{p}, t), \\ p'_i &= p'_i(\vec{q}, \vec{p}, t), \end{aligned}$$

als eine **kanonische Transformation**, falls die Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen durch

$$\frac{d}{dt} q'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \quad \frac{d}{dt} p'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i}$$

gegeben sind, wobei $H'(\vec{q}', \vec{p}', t)$ die Hamilton-Funktion ausgedrückt in den neuen Variablen ist. Wir bezeichnen eine Transformation also als kanonisch, falls unter ihr die Hamilton-Gleichungen forminvariant sind.

Bemerkung 1: Es läßt sich zeigen, daß jede Transformation der Form

$$q'_i = q'_i(\vec{q}, t), \quad p'_i = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i}$$

eine kanonische Transformation ist. Eine allgemeine Koordinatentransformation ist also immer eine kanonische Transformation.

Bemerkung 2: Die Menge der kanonischen Transformationen ist größer als die Menge der allgemeinen Koordinatentransformationen, die wir im Rahmen der Lagrange-Formulierung kennengelernt haben. Dies liegt daran, daß kanonische Transformationen von \vec{q} , \vec{p} und t abhängen können, die allgemeinen Koordinatentransformationen aber nur von \vec{q} und t abhängen. Der Hamilton-Formalismus, der die Größen \vec{q} und \vec{p} gleichberechtigt behandelt, erlaubt hier größere Freiheiten.

Bemerkung 3: Während im Lagrange-Formalismus jede eindeutige und umkehrbare Koordinatentransformation $q'_i = q'_i(\vec{q}, t)$ automatisch die Euler-Lagrange-Gleichungen forminvariant läßt, ist dies im Hamilton-Formalismus für beliebige Transformationen $q'_i = q'_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$, $p'_i = p'_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$ im allgemeinen nicht der Fall.

Unter welchen Voraussetzungen ist nun eine Transformation der Form

$$q'_i = q'_i(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad p'_i = p'_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

kanonisch? Die Hamilton-Gleichungen in den ursprünglichen Variablen folgen aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} dt [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] = 0,$$

wobei für die Variation der Bahnen am Anfangs- und Endzeitpunkt

$$\delta \vec{q}(t_a) = \delta \vec{q}(t_b) = 0$$

gilt. Die Variationen $\delta \vec{p}(t_a)$ und $\delta \vec{p}(t_b)$ unterliegen keinen Einschränkungen.

Ist die Transformation kanonisch, so gilt eine entsprechende Aussage natürlich auch für die gestrichenen Größen:

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} dt [\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)] = 0,$$

wobei nun die Variation bezüglich Bahnen betrachtet wird, die

$$\delta \vec{q}'(t_a) = \delta \vec{q}'(t_b) = 0$$

erfüllen. An dieser Stelle sei bemerkt, daß aus $\delta \vec{q}(t_a) = 0$ nicht notwendigerweise $\delta \vec{q}'(t_a) = 0$ folgt, da die Transformation auch von den Impulsen \vec{p} abhängt und im allgemeinen $\delta \vec{p}(t_a) \neq 0$ ist.

Wir wollen nun eine bestimmte Klasse von kanonischen Transformationen betrachten, die als

Berührungstransformationen oder **Kontakttransformationen** bezeichnet werden. Innerhalb dieser Klasse unterscheiden wir vier Fälle.

Der erste Fall ist dadurch definiert, daß eine Funktion $\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)$ existiert, so daß

$$[\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)] - [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] + \frac{d}{dt} \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t) = 0,$$

wobei

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_i \partial q'_j} \right) \neq 0$$

gelten soll. Die Funktion $\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)$ wird als **erzeugende Funktion** der kanonischen Transformation bezeichnet. Die erzeugende Funktion definiert zunächst die Transformation. Um dies zu sehen, formen wir die obige Gleichung um:

$$\sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} - p_i \right) \dot{q}_i + \left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'_i} + p'_i \right) \dot{q}'_i \right] + \left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial t} + H - H' \right) = 0.$$

Betrachten wir \vec{q} und \vec{q}' als unabhängige Größen, so ist diese Gleichung nur erfüllt, falls

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} - p_i = 0, \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'_i} + p'_i = 0, \quad \frac{\partial \Lambda_1}{\partial t} + H - H' = 0$$

gilt. In anderen Worten

$$p_i = \frac{\partial \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q'_i},$$

sowie

$$H' = H + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial t}.$$

Die Gleichungen $p_i = \partial \Lambda_1 / \partial q_i$ und $p'_i = -\partial \Lambda_1 / \partial q'_i$ legen die Transformation fest: Wegen

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_i \partial q'_j} \right) \neq 0$$

ist der erste Satz der Gleichungen nach \vec{q}' auflösbar:

$$\vec{q}' = \vec{q}'(\vec{q}, \vec{p}, t).$$

Dies eingesetzt in den zweiten Satz der Gleichungen liefert die Transformation für \vec{p}' :

$$\vec{p}' = \vec{p}'(\vec{q}, \vec{p}, t).$$

Die so definierte Transformation ist kanonisch. Um dies zu sehen, bestimmen wir die Bewegungsgleichungen in den gestrichenen Größen. Wir gehen vom Wirkungsprinzip in den ungestrichenen Größen aus:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \int_{t_a}^{t_b} dt [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] \\
&= \delta \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t) + \frac{d}{dt} \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{t_a}^{t_b} dt \left(p'_i \delta \dot{q}'_i + \dot{q}'_i \delta p'_i - \frac{\partial H'}{\partial q'_i} \delta q'_i - \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \delta p'_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'_i} \delta q'_i \right).
\end{aligned}$$

Nun ist allerdings

$$\int_{t_a}^{t_b} dt \frac{d}{dt} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i} \delta q_i \Big|_{t_a}^{t_b} = 0,$$

und

$$\int_{t_a}^{t_b} dt p'_i \delta \dot{q}'_i = \int_{t_a}^{t_b} dt p'_i \frac{d}{dt} \delta q'_i = p'_i \delta q'_i \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{d}{dt} p'_i \right) \delta q'_i.$$

Somit erhalten wir

$$0 = \sum_{i=1}^n \left\{ \left(p'_i + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'_i} \right) \delta q'_i \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\left(\dot{q}'_i - \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \right) \delta p'_i - \left(\frac{\partial H'}{\partial q'_i} + \frac{d}{dt} p'_i \right) \delta q'_i \right] \right\}$$

Wegen

$$p'_i = - \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'_i}$$

verschwinden die Randterme und wir haben

$$0 = \sum_{i=1}^n \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\left(\dot{q}'_i - \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \right) \delta p'_i - \left(\frac{\partial H'}{\partial q'_i} + \frac{d}{dt} p'_i \right) \delta q'_i \right]$$

Die Koeffizienten von $\delta p'_i$ und $\delta q'_i$ müssen unabhängig voneinander verschwinden und wir erhalten

$$\frac{d}{dt} q'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \quad \frac{d}{dt} p'_i = - \frac{\partial H'}{\partial q'_i}.$$

Somit ist die Forminvarianz der Bewegungsgleichungen unter dieser Transformation gezeigt.

Wir wollen noch die drei weiteren Fälle der Berührungstransformationen betrachten. Der zweite Fall ist dadurch definiert, daß eine Funktion $\Lambda_2(\vec{q}, \vec{p}', t)$ existiert, so daß

$$[\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)] - [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] + \frac{d}{dt} [-\vec{q}' \cdot \vec{p}' + \Lambda_2(\vec{q}, \vec{p}', t)] = 0,$$

wobei

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial q_i \partial p'_j} \right) \neq 0$$

gelten soll. Die generierende Funktion Λ_2 hängt hierbei von den ursprünglichen Ortskoordinaten \vec{q} und den neuen Impulskoordinaten \vec{p}' ab. Es ist nun

$$\frac{d}{dt} [-\vec{q}' \cdot \vec{p}' + \Lambda_2(\vec{q}, \vec{p}', t)] = -\dot{\vec{q}}' \cdot \vec{p}' - \vec{q}' \cdot \dot{\vec{p}}' + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Lambda_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \Lambda_2}{\partial p'_i} \dot{p}'_i \right) + \frac{\partial \Lambda_2}{\partial t}.$$

Die Terme proportional zu $\dot{\vec{q}}' \cdot \vec{p}'$ heben sich weg. Durch Vergleich der Koeffizienten von \dot{q}_i , \dot{p}'_i und 1 findet man nun

$$p_i = \frac{\partial \Lambda_2}{\partial q_i}, \quad q'_i = \frac{\partial \Lambda_2}{\partial p'_i},$$

sowie

$$H' = H + \frac{\partial \Lambda_2}{\partial t}.$$

Der dritte Fall ist dadurch definiert, daß eine Funktion $\Lambda_3(\vec{p}, \vec{q}', t)$ existiert, so daß

$$[\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)] - [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] + \frac{d}{dt} [\vec{q} \cdot \vec{p}' + \Lambda_3(\vec{p}, \vec{q}', t)] = 0,$$

wobei

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Lambda_3}{\partial p_i \partial q'_j} \right) \neq 0$$

gelten soll. Hier hängt die generierende Funktion Λ_3 von den alten Impulsen \vec{p} und den neuen Ortskoordinaten \vec{q}' ab. Man beachte das Vorzeichen des Terms $\frac{d}{dt}(\vec{q} \cdot \vec{p}')$. Hier findet man

$$q_i = -\frac{\partial \Lambda_3}{\partial p_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial \Lambda_3}{\partial q'_i},$$

sowie

$$H' = H + \frac{\partial \Lambda_3}{\partial t}.$$

Zu guter Letzt betrachten wir noch den vierten Fall, der durch die Bedingung

$$[\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)] - [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] + \frac{d}{dt} [\vec{q} \cdot \vec{p} - \vec{q}' \cdot \vec{p}' + \Lambda_4(\vec{p}, \vec{p}', t)] = 0$$

definiert ist, wobei

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Lambda_4}{\partial p_i \partial p'_j} \right) \neq 0$$

gelten soll. In diesem Fall hat man

$$q_i = -\frac{\partial \Lambda_4}{\partial p_i}, \quad q'_i = \frac{\partial \Lambda_4}{\partial p'_i},$$

sowie

$$H' = H + \frac{\partial \Lambda_4}{\partial t}.$$

Betrachten wir nun ein Beispiel für eine kanonische Transformation. Wir betrachten den harmonischen Oszillator in einer Dimension. Die Hamilton-Funktion dieses Systems lautet

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Wir betrachten eine kanonische Transformation des ersten Typs, die durch die Funktion

$$\Lambda_1(q, q') = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot q'$$

erzeugt wird. Es ist

$$p = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q} = m\omega q \cot q',$$

$$p' = -\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'} = \frac{1}{2}m\omega q^2 \frac{1}{\sin^2 q'}.$$

Lösen wir diese Gleichungen nach q und p auf, so finden wir

$$q = \sqrt{\frac{2p'}{m\omega}} \sin q',$$

$$p = \sqrt{2m\omega p'} \cos q'.$$

Allgemein gilt für eine kanonische Transformation des ersten Typs die Beziehung

$$H'(q', p', t) = H(q, p, t) + \frac{\partial}{\partial t} \Lambda_1(q, q', t)$$

zwischen den Hamilton-Funktionen H' und H . Im konkreten Fall hängt Λ_1 nicht von der Zeit ab und die partielle Ableitung nach der Zeit verschwindet. Somit ergibt sich

$$H'(q', p') = H(q, p) = H\left(\sqrt{\frac{2p'}{m\omega}} \sin q', \sqrt{2m\omega p'} \cos q'\right) = \omega p' \cos^2 q' + \omega p' \sin^2 q' = \omega p'.$$

Die Variable q' ist zyklisch. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\frac{d}{dt}q' = \omega, \quad \frac{d}{dt}p' = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist gegeben durch

$$q'(t) = \omega t + q'_0, \quad p'(t) = p'_0.$$

Transformiert man nun wieder zurück auf die ursprünglichen Variablen q und p , so findet man die übliche Form der Lösung des harmonischen Oszillators. Wir haben gesehen, daß durch eine geschickte Wahl einer kanonischen Transformation die Lösung der Differentialgleichungen vereinfacht werden kann.

Wir betrachten noch ein Beispiel, in dem die erzeugende Funktion explizit von der Zeit t abhängt. Im System S betrachten wir ein Teilchen, daß sich kräftefrei bewegt. Die Hamilton-Funktion lautet

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2m}.$$

Die Hamilton-Gleichungen lauten dann

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = 0.$$

Diese Differentialgleichungen lassen sich ohne Schwierigkeiten lösen (aus $\dot{p} = 0$ folgt sofort, daß p konstant ist; setzt man dies in die erste Differentialgleichung ein, so folgt daß $q(t)$ eine lineare Funktion von t ist) und wir erhalten

$$q(t) = \frac{p_0}{m}t + q_0, \quad p(t) = p_0,$$

wobei q_0 und p_0 zwei Integrationskonstanten sind. Dies beschreibt natürlich – wie erwartet – eine geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Wir betrachten nun eine kanonische Transformation, die durch

$$\Lambda_1(q, q', t) = qte^{q'}$$

erzeugt wird. Es gilt

$$p = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q} = te^{q'}, \quad p' = -\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'} = -qte^{q'}.$$

Wir können diese Gleichungen nach q' und p' auflösen und finden

$$q' = \ln \frac{p}{t}, \quad p' = -qp.$$

Umgekehrt können wir natürlich auch nach q und p auflösen und erhalten

$$q = -\frac{p'}{t}e^{-q'}, \quad p = te^{q'}.$$

Mit Hilfe der Formeln für q' und p' können wir die Bahnkurve $q(t) = p_0 t/m + q_0$, $p(t) = p_0$ ins System S' umrechnen und erhalten

$$q'(t) = \ln \frac{p_0}{t}, \quad p'(t) = -\frac{p_0^2}{m}t - p_0 q_0.$$

Da die Transformation kanonisch ist, sollten wir diese Bahnkurve auch erhalten, falls wir vollständig im System S' rechnen. Dies wollen wir nun überprüfen. Die Hamilton-Funktion im System S' ist gegeben durch

$$H' = H + \frac{\partial \Lambda_1}{\partial t} = \frac{p^2}{2m} + qe^{q'} = \frac{t^2}{2m}e^{2q'} - \frac{p'}{t},$$

also

$$H'(q', p', t) = \frac{t^2}{2m}e^{2q'} - \frac{p'}{t}.$$

Aus dieser Hamilton-Funktion folgen die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}' = -\frac{1}{t}, \quad \dot{p}' = -\frac{t^2}{m}e^{2q'}.$$

Wir verifizieren nun, dass $q'(t) = \ln(p_0/t)$, $p'(t) = -p_0^2 t/m - p_0 q_0$ Lösungen dieser Differentialgleichungen sind. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q'(t) &= \frac{d}{dt} \ln \frac{p_0}{t} = -\frac{1}{t}, \\ \frac{d}{dt}p'(t) &= \frac{d}{dt} \left[-\frac{p_0^2}{m}t - p_0 q_0 \right] = -\frac{p_0^2}{m}. \end{aligned}$$

Andererseits ist aber auch

$$-\frac{t^2}{m}e^{2q'(t)} = -\frac{t^2}{m} \left(\frac{p_0}{t} \right)^2 = -\frac{p_0^2}{m}$$

und somit ist verifiziert, daß $q'(t)$ und $p'(t)$ Lösungen der Hamilton-Gleichungen im System S' sind.

Die vier verschiedenen Typen einer Berührungstransformation gehen durch Legendre-Transformationen auseinander hervor. Wir gehen von einer Berührungstransformation des ersten Typs aus, die durch die generierende Funktion $\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)$ erzeugt wird. Wir wollen weiter annehmen, daß

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q'_i \partial q'_j} \right) \neq 0$$

Führen wir nun eine Legendre-Transformation der Funktion $-\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)$ bezüglich der Variablen \vec{q}' durch, so erhalten wir eine Funktion

$$\Lambda_2(\vec{q}, \vec{p}', t) = \vec{p}' \cdot \vec{q}'(\vec{q}, \vec{p}', t) + \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}'(\vec{q}, \vec{p}', t), t),$$

wobei $\vec{q}'(\vec{q}, \vec{p}', t)$ aus

$$p'_i = -\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'_i}$$

bestimmt wird. Gilt nun

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Lambda_2}{\partial q_i \partial p'_j} \right) \neq 0,$$

so generiert die Funktion $\Lambda_2(\vec{q}, \vec{p}', t)$ eine Berührungstransformation des zweiten Typs.

Ebenso erhalten wir eine Berührungstransformation des dritten Typs, indem wir eine Legendre-Transformation der Funktion $\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)$ bezüglich der Variablen \vec{q} durchführen. Das Ergebnis nennen wir $-\Lambda_3(\vec{p}, \vec{q}', t)$:

$$-\Lambda_3(\vec{p}, \vec{q}', t) = \vec{p} \cdot \vec{q}(\vec{p}, \vec{q}', t) - \Lambda_1(\vec{q}(\vec{p}, \vec{q}', t), \vec{q}', t),$$

wobei $q_i(\vec{p}, \vec{q}', t)$ aus

$$p_i = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i}$$

bestimmt wird. Gilt

$$\det \left(\frac{\partial^2 \Lambda_3}{\partial p_i \partial q'_j} \right) \neq 0,$$

so generiert die Funktion $\Lambda_3(\vec{p}, \vec{q}', t)$ eine Berührungstransformation des dritten Typs.

Kombinieren wir die Legendre-Transformationen bezüglich der Variablen \vec{q} und \vec{q}' , so erhalten wir aus $\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)$ eine Funktion $\Lambda_4(\vec{p}, \vec{p}', t)$, welche eine Berührungstransformation des vierten Typs erzeugt.

Im folgenden wollen wir annehmen, daß alle auftretenden impliziten Gleichungen immer lösbar sind, d.h. das alle relevanten Determinanten nicht verschwinden. Betrachten wir nochmal eine Berührungstransformation des ersten Typs. Aus

$$p_i = \frac{\partial \Lambda_1}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial \Lambda_1}{\partial q'_i},$$

folgt durch Ableiten der ersten Gleichung nach q'_j und der zweiten Gleichung nach q_j :

$$\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q'_j \partial q_i}, \quad \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_j \partial q'_i}.$$

Wir nehmen an, daß die Funktion Λ_1 zweimal stetig differenzierbar ist. Somit vertauschen die zweiten Ableitungen und wir finden

$$\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} = -\frac{\partial p'_j}{\partial q_i}.$$

Aus der Betrachtung einer Berührungstransformation des zweiten Typs finden wir analog

$$\frac{\partial p_i}{\partial p'_j} = \frac{\partial q'_j}{\partial q_i},$$

und aus der Betrachtung einer Berührungstransformation des dritten Typs finden wir

$$\frac{\partial q_i}{\partial q'_j} = \frac{\partial p'_j}{\partial p_i}.$$

Die Betrachtung einer Berührungstransformation des vierten Typs liefert

$$\frac{\partial q_i}{\partial p'_j} = -\frac{\partial q'_j}{\partial p_i}.$$

Wir werden diese vier Beziehungen später bei der Diskussion der symplektischen Struktur des Phasenraums benötigen.

Wir stellen noch die Beziehung zwischen kanonischen Transformationen und Berührungstransformationen heraus: Die Berührungstransformationen sind eine Teilmenge der kanonischen Transformationen. Wir hatten für ein System mit den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{dt} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

eine Transformation

$$q'_i = q'_i(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad p'_i = p'_i(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

als kanonisch bezeichnet, falls die Bewegungsgleichungen in den neuen Variablen durch

$$\frac{d}{dt}q'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \quad \frac{d}{dt}p'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i}$$

gegeben sind. Auch wissen wir bereits, daß aus

$$\delta \int_{t_a}^{t_b} dt [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] = 0$$

die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen folgen. Berührungstransformationen sind Transformationen, für die eine erzeugende Funktion Λ existiert, so daß

$$[\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)] - [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] + \frac{d}{dt}\Lambda = 0.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_a}^{t_b} dt [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] = \delta \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t) + \frac{d}{dt}\Lambda \right] \\ &= \delta \int_{t_a}^{t_b} dt [\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)], \end{aligned}$$

und somit folgen aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen im System S die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen im System S' . Dies zeigt, daß jede Berührungstransformation eine kanonische Transformation ist. Die Menge der kanonischen Transformationen ist aber größer als die Menge der Berührungstransformationen. Betrachten wir den Fall, daß eine Konstante $\lambda \notin \{0, 1\}$ existiert, so daß

$$[\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)] - \lambda [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] + \frac{d}{dt}\Lambda = 0.$$

Für $\lambda \neq 1$ ist dies keine Berührungstransformation, aber eine kanonische Transformation. Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen im System S' folgen wieder aus

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \int_{t_a}^{t_b} dt [\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H(\vec{q}, \vec{p}, t)] = \delta \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\lambda (\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)) + \frac{d}{dt}\Lambda \right] \\ &= \lambda \delta \int_{t_a}^{t_b} dt [\vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H'(\vec{q}', \vec{p}', t)]. \end{aligned}$$

Transformationen mit $\Lambda = 0$ und $\lambda \notin \{0, 1\}$ bezeichnet man als **Skalentransformationen**.

4.6 Die Poisson-Klammern

Die Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ ist eine Funktion der verallgemeinerten Koordinaten \vec{q} , der verallgemeinerten Impulse \vec{p} und der Zeit t . Wir wollen nun ganz allgemein Funktionen

$$A(\vec{q}, \vec{p}, t)$$

betrachten, die von diesen Variablen \vec{q} , \vec{p} und t abhängen. Setzen wir in diese Funktion die physikalischen Lösungen $\vec{q}(t)$ und $\vec{p}(t)$ ein, so ist

$$A(t) = A(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t)$$

eine Observable oder Meßgröße der klassischen Mechanik. Betrachten wir nun zwei Funktionen $A(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $B(\vec{q}, \vec{p}, t)$. Wir definieren die **Poisson-Klammer** dieser Funktionen wie folgt:

$$\{A, B\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right).$$

Die Poisson-Klammer ist wieder eine Funktion von \vec{q} , \vec{p} und t .

Wir betrachten nun die zeitliche Ableitung der Funktion $A(\vec{q}, \vec{p}, t)$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(\vec{q}, \vec{p}, t) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Hamilton-Gleichungen $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ und $\dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i$ verwendet haben. Ist A eine Erhaltungsgröße, d.h. gilt

$$\frac{d}{dt}A = 0,$$

so ist dies gleichbedeutend mit

$$\{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0.$$

Hängt desweitem A nicht explizit von der Zeit t ab, so vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\{A, H\} = 0.$$

Wir haben also den folgenden Sachverhalt: Hängt A nicht explizit von der Zeit t ab, und verschwindet die Poisson-Klammer von A mit der Hamilton-Funktion H , so folgt daß A eine Erhaltungsgröße ist. Anstelle des Ausdruckes "Erhaltungsgröße" verwendet man auch die Bezeichnung **Integral der Bewegung**.

Wir betrachten noch einige Eigenschaften der Poisson-Klammern. Die Poisson-Klammer ist antisymmetrisch:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}.$$

Sie ist weiterhin bilinear:

$$\begin{aligned}\{c_1 A_1 + c_2 A_2, B\} &= c_1 \{A_1, B\} + c_2 \{A_2, B\}, \\ \{A, c_1 B_1 + c_2 B_2\} &= c_1 \{A, B_1\} + c_2 \{A, B_2\}.\end{aligned}$$

Ausserdem gilt die Jacobi-Identität:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

Die Jacobi-Identität läßt sich einfach durch Nachrechnen beweisen.

Wir betrachten nun einige Spezialfälle: Die Poisson-Klammer der Koordinatenfunktionen verschwindet

$$\{q_i, q_j\} = 0,$$

da

$$\{q_i, q_j\} = \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k}}_{=0} \right) = 0.$$

Ebenso verschwindet die Poisson-Klammer der Impulsfunktionen:

$$\{p_i, p_j\} = \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0} \right) = 0.$$

Für die Poisson-Klammer zwischen der Koordinatenfunktion q_i und der Impulsfunktion p_j finden wir allerdings

$$\{q_i, p_j\} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k}}_{=0} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij}.$$

Wir fassen zusammen:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}.$$

Bemerkung: Die Funktionen $A(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und die Poisson-Klammern haben einen engen Bezug zur Quantenmechanik. In der Quantenmechanik ersetzt man die Funktionen $A(\vec{q}, \vec{p}, t)$ durch Operatoren \hat{A} und die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ durch das $1/(i\hbar)$ -fache des Kommutators $[\hat{A}, \hat{B}]$ der Operatoren \hat{A} und \hat{B} . In der Quantenmechanik hat man daher die Kommutationsrelationen

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}.$$

Wir betrachten noch das Verhalten der Poisson-Klammern unter Berührungstransformationen. Sei

$$q'_i = q'_i(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad p'_i = p'_i(\vec{q}, \vec{p}, t),$$

eine Berührungstransformation, die zum Beispiel durch die generierende Funktion $\Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)$ erzeugt wird. Für diese Berührungstransformation gilt:

$$p_i = \frac{\partial \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q'_i}.$$

Wir betrachten nun die Variablen \vec{q} und \vec{p} als unabhängig und die Größen $\vec{q}'(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $\vec{p}'(\vec{q}, \vec{p}, t)$ als abhängig. Durch Ableiten der ersten Gleichung nach q_j finden wir

$$0 = \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q_i \partial q_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q_i \partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial q_j}.$$

Diese Gleichung können wir nach $\frac{\partial q'_i}{\partial q_j}$ auflösen und finden

$$\frac{\partial q'_i}{\partial q_j} = -\sum_{k=1}^n (M^{-1})_{ik} \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q_k \partial q_j}, \quad M_{ik} = \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q_i \partial q'_k}.$$

Leiten wir dagegen die erste Gleichung nach p_j ab, so finden wir

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q_i \partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial p_j},$$

also

$$\frac{\partial q'_i}{\partial p_j} = (M^{-1})_{ij}.$$

Leiten wir weiter die zweite Gleichung nach q_j und p_j ab, so finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} &= -\frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q'_i \partial q_j} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q'_i \partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial q_j}, \\ \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} &= -\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Lambda_1(\vec{q}, \vec{q}', t)}{\partial q'_i \partial q'_k} \frac{\partial q'_k}{\partial p_j}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Poisson-Klammern der Variablen \vec{q}' und \vec{p}' bezüglich \vec{q} und \vec{p} . Es ist

$$\begin{aligned}\{q'_i, q'_j\} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial q'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[- (M^{-1})_{il} \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_l \partial q_k} (M^{-1})_{jk} + (M^{-1})_{ik} (M^{-1})_{jl} \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_l \partial q_k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left[(M^{-1})_{ik} (M^{-1})_{jl} - (M^{-1})_{il} (M^{-1})_{jk} \right] \frac{\partial^2 \Lambda_1}{\partial q_l \partial q_k} = 0.\end{aligned}$$

Ebenso findet man nach einer etwas längeren Rechnung

$$\begin{aligned}\{p'_i, p'_j\} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial p'_i}{\partial q_k} \frac{\partial p'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p'_i}{\partial p_k} \frac{\partial p'_j}{\partial q_k} \right) = 0, \\ \{q'_i, p'_j\} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial p'_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \frac{\partial p'_j}{\partial q_k} \right) = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Relationen

$$\{q'_i, q'_j\} = 0, \quad \{p'_i, p'_j\} = 0, \quad \{q'_i, p'_j\} = \delta_{ij}$$

läßt sich nun zeigen, daß die Poisson-Klammer $\{A, B\}$ zweier Funktionen $A(\vec{q}, \vec{p}, t)$ und $B(\vec{q}, \vec{p}, t)$ invariant unter den Berührungstransformationen ist, d.h.

$$\{A, B\}_{\vec{q}, \vec{p}} = \{A', B'\}_{\vec{q}', \vec{p}'}$$

Hierbei setzen wir

$$A'(\vec{q}', \vec{p}', t) = A(\vec{q}(\vec{q}', \vec{p}', t), \vec{p}(\vec{q}', \vec{p}', t), t).$$

Umgekehrt gilt natürlich auch

$$A(\vec{q}, \vec{p}, t) = A'(\vec{q}'(\vec{q}, \vec{p}, t), \vec{p}'(\vec{q}, \vec{p}, t), t).$$

Analoge Beziehungen gelten für die Funktionen B und B' . Somit ist

$$\begin{aligned}\{A, B\}_{\vec{q}, \vec{p}} &= \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial A'(\vec{q}', \vec{p}', t)}{\partial q_k} \frac{\partial B'(\vec{q}', \vec{p}', t)}{\partial p_k} - \frac{\partial A'(\vec{q}', \vec{p}', t)}{\partial p_k} \frac{\partial B'(\vec{q}', \vec{p}', t)}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial A'}{\partial q'_i} \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i} \frac{\partial p'_i}{\partial q_k} \right) \left(\frac{\partial B'}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial p_k} + \frac{\partial B'}{\partial p'_j} \frac{\partial p'_j}{\partial p_k} \right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\partial A'}{\partial q'_i} \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i} \frac{\partial p'_i}{\partial p_k} \right) \left(\frac{\partial B'}{\partial q'_j} \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} + \frac{\partial B'}{\partial p'_j} \frac{\partial p'_j}{\partial q_k} \right) \Big] \\
& = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial A'}{\partial q'_i} \frac{\partial B'}{\partial q'_j} \{q'_i, q'_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} + \frac{\partial A'}{\partial q'_i} \frac{\partial B'}{\partial p'_j} \{q'_i, p'_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i} \frac{\partial B'}{\partial q'_j} \{p'_i, q'_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i} \frac{\partial B'}{\partial p'_j} \{p'_i, p'_j\}_{\bar{q}, \bar{p}} \right] \\
& = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial A'}{\partial q'_i} \frac{\partial B'}{\partial p'_j} \delta_{ij} + \frac{\partial A'}{\partial p'_i} \frac{\partial B'}{\partial q'_j} (-\delta_{ij}) \right] \\
& = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A'}{\partial q'_i} \frac{\partial B'}{\partial p'_i} - \frac{\partial A'}{\partial p'_i} \frac{\partial B'}{\partial q'_i} \right) \\
& = \{A', B'\}_{\bar{q}, \bar{p}}.
\end{aligned}$$

Somit folgt die Aussage, daß die Poisson-Klammern unter Berührungstransformationen invariant sind.

4.7 Der Phasenraum und der Satz von Liouville

Als Phasenraum eines physikalischen Systems mit n Freiheitsgraden bezeichnet man den Raum der Dimension $(2n)$ der durch die Punkte

$$(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

gegeben ist. Wir wollen im folgenden einen Punkt des Phasenraums durch die Notation

$$\vec{r} = (r_1, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots, r_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

bezeichnen. Wir führen weiter die $(2n) \times (2n)$ -Matrix J ein, die durch

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{1}_{n \times n} \\ -\mathbf{1}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{pmatrix}$$

definiert ist. Offensichtlich ist

$$J \cdot J = -\mathbf{1}_{(2n) \times (2n)}$$

und

$$J^{-1} = J^T = -J.$$

Mit Hilfe der Matrix J lassen sich die Hamilton-Gleichungen kompakt wie folgt aufschreiben:

$$\frac{d}{dt} r_i = \sum_{j=1}^{2n} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial r_j}.$$

Wir betrachten nochmal die Berührungstransformationen und definieren die $(2n) \times (2n)$ Matrizen M und M^{-1} wie folgt

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} & \frac{\partial q_i}{\partial p'_j} \\ \frac{\partial p_i}{\partial q'_j} & \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} \end{pmatrix} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q'_i}{\partial q_j} & \frac{\partial q'_i}{\partial p_j} \\ \frac{\partial p'_i}{\partial q_j} & \frac{\partial p'_i}{\partial p_j} \end{pmatrix}$$

M und M^{-1} sind die Jacobi-Matrizen der Hin- und Rücktransformation. Daher sind sie auch zueinander invers, d.h.

$$M^{-1} \cdot M = \mathbf{1}_{(2n) \times (2n)}.$$

Nun wissen wir aber, daß für eine Berührungstransformation zusätzlich die Relationen

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} &= \frac{\partial q'_j}{\partial q_i}, & \frac{\partial q_i}{\partial p'_j} &= -\frac{\partial q'_j}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial p_i}{\partial q'_j} &= -\frac{\partial p'_j}{\partial q_i}, & \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} &= \frac{\partial p'_j}{\partial p_i} \end{aligned}$$

gelten. Wir haben also

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_j}{\partial p'_i} & -\frac{\partial q_j}{\partial p'_i} \\ -\frac{\partial p_j}{\partial q'_i} & \frac{\partial q_j}{\partial q'_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} & -\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} \\ -\frac{\partial q_i}{\partial p'_j} & \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \end{pmatrix}^T$$

Nun ist aber auch

$$-J \cdot M \cdot J = - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} & \frac{\partial q_i}{\partial p'_j} \\ \frac{\partial p_i}{\partial q'_j} & \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_i}{\partial p'_j} & -\frac{\partial p_i}{\partial q'_j} \\ -\frac{\partial q_i}{\partial p'_j} & \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} \end{pmatrix},$$

und somit

$$M^{-1} = (-J \cdot M \cdot J)^T = -J \cdot M^T \cdot J.$$

Somit folgt aus $M^{-1} \cdot M = \mathbf{1}$

$$M^T \cdot J \cdot M = J.$$

Wir können diese Gleichung wie folgt interpretieren: Die Jacobi-Matrix einer Berührungstransformation läßt die Matrix J invariant. Es läßt sich zeigen, daß die Menge aller $(2n) \times (2n)$ -Matrizen M , die $M^T \cdot J \cdot M = J$ erfüllen, eine Gruppe bilden, die man als **reelle symplektische Gruppe** $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ bezeichnet. Weiter läßt sich zeigen, daß für $M \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ stets

$$\det M = 1$$

gilt¹.

Wir betrachten nun im Phasenraum Lösungen $\vec{r}(t)$ der Hamilton-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}r_i = \sum_{j=1}^{2n} J_{ij} \frac{\partial H}{\partial r_j}$$

zu den Anfangsbedingungen

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0.$$

Um die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen deutlich zu machen, schreiben wir $\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$. Man bezeichnet eine solche Lösung auch als **Fluss** im Phasenraum. Wir können nun die Frage stellen, wie ändert sich der Wert $\vec{r}(t)$, falls wir die Anfangsbedingungen \vec{r}_0 zur Zeit t_0 ändern? Wir betrachten die Ableitungen

$$M_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_{0,j}} r_i(t, t_0, \vec{r}_0), \quad 1 \leq i, j \leq 2n.$$

Dies definiert eine $(2n) \times (2n)$ -Matrix M . Es gilt die folgende Aussage:

$$M \in \text{Sp}(n, \mathbb{R}).$$

Dies ist der Satz von Liouville. Wir beweisen diesen Satz wie folgt: Für $t = t_0$ ist

$$\frac{\partial}{\partial r_{0,j}} r_i(t_0, t_0, \vec{r}_0) = \mathbf{1}_{(2n) \times (2n)}$$

und die Aussage ist klarerweise erfüllt, da die Einheitsmatrix in der Gruppe $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ enthalten ist. Da $\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$ eine Lösung der Hamilton-Gleichungen ist, gilt

$$\frac{d}{dt} r_i(t, t_0, \vec{r}_0) = \sum_{k=1}^{2n} J_{ik} \frac{\partial H(\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0), t)}{\partial r_k}.$$

¹Aus $M^T \cdot J \cdot M = J$ folgt unmittelbar $(\det M)^2 \det J = \det J$ und somit $\det M = \pm 1$. Um zu zeigen, daß $\det M = 1$ gilt, kann man auf die Eigenschaften des Pfaffians einer anti-symmetrischen Matrix $A = -A^T$ zurückgreifen. Für eine anti-symmetrische $(2n) \times (2n)$ -Matrix A ist der Pfaffian rekursiv durch

$$\text{Pf}(A) = \sum_{j=2}^{2n} (-1)^j A_{1j} \text{Pf}(A[1, j])$$

definiert, wobei $A[1, j]$ diejenige $(2n-2) \times (2n-2)$ -Matrix bezeichnet, die man aus A durch streichen der 1-ten und j -ten Zeile und Spalte erhält. Für eine 0×0 -Matrix setzt man $\text{Pf}(A) = 1$. Für den Pfaffian gilt

$$\begin{aligned} \det A &= (\text{Pf}(A))^2, \\ \text{Pf}(B^T A B) &= \det(B) \cdot \text{Pf}(A), \end{aligned}$$

wobei B eine beliebige $(2n) \times (2n)$ -Matrix ist. Da J eine anti-symmetrische Matrix ist, gilt

$$\text{Pf}(J) = \text{Pf}(M^T \cdot J \cdot M) = \det(M) \cdot \text{Pf}(J),$$

und es folgt $\det M = 1$.

Differenzieren wir nun nach $r_{0,j}$, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r_i(t, t_0, \vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}} = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{l=1}^{2n} J_{ik} \frac{\partial^2 H(\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0), t)}{\partial r_k \partial r_l} \frac{\partial r_l(t, t_0, \vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}}.$$

Mit der Notation

$$M_{ij} = \frac{\partial r_i(t, t_0, \vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}}, \quad R_{kl} = \frac{\partial^2 H(\vec{r}, t)}{\partial r_k \partial r_l}$$

können wir diese Gleichung auch kompakt in Matrixschreibweise angeben:

$$\frac{d}{dt} M = J \cdot R \cdot M.$$

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M^T \cdot J \cdot M) &= \left(\frac{d}{dt} M \right)^T \cdot J \cdot M + M^T \cdot J \cdot \left(\frac{d}{dt} M \right) \\ &= M^T \cdot R^T \cdot J^T \cdot J \cdot M + M^T \cdot J \cdot J \cdot R \cdot M \\ &= M^T \cdot (R^T - R) \cdot M = 0, \end{aligned}$$

da $R^T = R$ ist. Also folgt $M^T \cdot J \cdot M = \text{const}$, und da wir schon wissen, daß zum Zeitpunkt $t = t_0$ M die Einheitsmatrix ist, gilt

$$M^T \cdot J \cdot M = J.$$

Dies zeigt, daß M eine symplektische Matrix ist. Wir haben damit die lokale Form des Satzes von Liouville bewiesen.

Bemerkung: Insbesondere gilt

$$\det M = \det \left(\frac{\partial r_i(t, t_0, \vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}} \right) = 1.$$

Der Satz von Liouville wird auch oft in integraler Form angegeben. In der integralen Form wird die physikalische Implikation des Satzes von Liouville besonders deutlich. Hierzu betrachten wir zur Zeit t_0 ein Gebiet U von Anfangskonfigurationen im Phasenraum. Dieses Gebiet hat im Phasenraum das Volumen

$$\text{vol}(U) = \int_U d^{2n} r_0.$$

Wir betrachten nun die Evolution dieser Anfangswerte bis zum Zeitpunkt t . Zum Zeitpunkt t geht der Anfangswert $\vec{r}_0 \in U$ über in den Punkt $\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$. Die Menge aller $\vec{r}(t, t_0, \vec{r}_0)$, $\vec{r}_0 \in U$ definiert

wieder ein Gebiet, daß wir mit V bezeichnen wollen. Die Lösungen der Hamilton-Gleichungen definieren also eine Abbildung $U \rightarrow V$. Für das Volumen von V gilt

$$\text{vol}(V) = \int_V d^{2n}r = \int_U d^{2n}r_0 \underbrace{\det\left(\frac{\partial r_i(t, t_0, \vec{r}_0)}{\partial r_{0,j}}\right)}_{=1} = \int_U d^{2n}r_0 = \text{vol}(U).$$

In anderen Worten: Das Phasenraumvolumen einer Menge von Phasenraumpunkten ist unter der Evolution bezüglich der Hamilton-Gleichungen zeitlich konstant. Dies ist die integrale Form des Satzes von Liouville.

4.8 Die Hamilton-Jacobische Theorie*

Wir haben bereits im Rahmen der Diskussion der kanonischen Transformationen anhand des Beispiels des harmonischen Oszillators gesehen, daß eine geschickt gewählte kanonische Transformation die Hamilton-Funktion und die Bewegungsgleichungen vereinfachen kann. Im Falle des harmonischen Oszillators sind wir von der Hamilton-Funktion

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

ausgegangen und haben die kanonische Transformation

$$\begin{aligned} q' &= \arctan \frac{m\omega q}{p}, \\ p' &= \frac{1}{2}m\omega q^2 + \frac{p^2}{2m\omega} \end{aligned}$$

betrachtet. Dies führte auf die neue und einfache Hamilton-Funktion

$$H'(q', p') = \omega p'.$$

Wir wollen nun diesen Sachverhalt systematischer untersuchen und stellen die Frage, unter welchen Bedingungen eine kanonische Transformation eine Hamilton-Funktion $H(\vec{q}, \vec{p})$ in die triviale Hamilton-Funktion

$$H'(\vec{q}', \vec{p}') = 0$$

überführt. Wir beschränken uns auf Berührungstransformationen des zweiten Typs. Gesucht ist also eine generierende Funktion $\Sigma(\vec{q}, \vec{p}', t)$, so daß $H' = 0$ gilt. Aus $H' = 0$ folgt sofort, daß alle neuen Variablen Konstanten der Bewegung sind:

$$\vec{q}'(t) = \vec{q}'_0, \quad \vec{p}'(t) = \vec{p}'_0.$$

Für eine Berührungstransformation des zweiten Typs gilt

$$H' = H + \frac{\partial \Sigma}{\partial t}, \quad p_i = \frac{\partial \Sigma}{\partial q_i}.$$

Somit erhalten wir

$$H(\vec{q}, \nabla_{\vec{q}} \Sigma, t) + \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = 0.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung in den $(n+1)$ Variablen \vec{q} und t für die unbekannte Funktion $\Sigma(\vec{q}, \vec{p}', t)$. Die n Variablen \vec{p}' können wir hierbei wegen $\vec{p}'(t) = \vec{p}'_0$ als Parameter betrachten. Diese partielle Differentialgleichung wird als die **Hamilton-Jacobische Differentialgleichung** bezeichnet.

Bemerkung: Mit dieser Vorgehensweise haben wir im allgemeinen das Problem nicht vereinfacht, sondern nur verschoben. Die Hamilton-Gleichungen, die aus $H' = 0$ folgen, sind nun zwar trivial, allerdings muß zunächst um auf diese Form zu kommen, die generierende Funktion $\Sigma(\vec{q}, \vec{p}', t)$ durch Lösen der partiellen Hamilton-Jacobi-Gleichung bestimmt werden. Partielle Differentialgleichungen sind im allgemeinen schwieriger zu lösen als gewöhnliche Differentialgleichungen, daher führt diese Methode im allgemeinen nicht zu einer Vereinfachung. In speziellen Fällen kann dieses Verfahren aber durchaus hilfreich sein.

Wir bemerken noch, daß sich die Hamilton-Jacobi-Gleichung vereinfacht, falls H nicht explizit von der Zeit abhängt. In diesem Fall können wir

$$\Sigma(\vec{q}, \vec{p}', t) = W(\vec{q}, \vec{p}') - Et$$

setzen und die Hamilton-Jacobi-Gleichung reduziert sich auf

$$H(\vec{q}, \nabla_{\vec{q}} W) = E.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung für die Funktion $W(\vec{q}, \vec{p}')$ in den n Variablen \vec{q} . Die n Variablen \vec{p}' können wieder als Parameter betrachtet werden. Die Funktion $W(\vec{q}, \vec{p}')$ wird auch als **verkürzte Wirkungsfunktion** bezeichnet.

4.9 Das Routhsche Verfahren*

Wir wollen noch ein weiteres Verfahren betrachten. Wir haben bereits gesehen, daß die Hamiltonsche Formulierung der Mechanik gegenüber der Lagrangeschen Formulierung einen Vorteil hat, falls alle Ortskoordinaten zyklisch sind. In diesem Fall sind die n kanonischen Impulse p_i Erhaltungsgrößen und die Lösung des Problems reduziert sich auf das Lösen der n Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Man erhält die Hamilton-Funktion wie immer durch eine Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion:

$$H(\vec{q}, \vec{p}, t) = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t) - L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}(\vec{p}, \vec{q}, t), t),$$

wobei $\vec{q}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ aus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

bestimmt wird. Nun tritt allerdings ausgesprochen selten der Fall auf, daß alle Ortsvariablen zyklisch sind. Üblicherweise sind einige – aber nicht alle – Ortsvariablen zyklisch. Betrachten wir also den Fall, daß k der n Variablen zyklisch sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß dies die ersten k Variablen sind. Wir betrachten also ein System, daß durch eine Lagrange-Funktion

$$L(q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n, t)$$

beschrieben wird. In diesem Fall liegt es nahe, nur eine Legendre-Transformation bezüglich der Variablen $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$ zu betrachten. Für eine beliebige Lagrange-Funktion

$$L(q_1, \dots, q_k, q_{k+1}, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n, t),$$

in der die ersten k Variablen nicht notwendigerweise zyklisch sein müssen, definieren wir die Legendre-Transformierte bezüglich der Variablen $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k$:

$$R(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_k, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n, t) = \left(\sum_{i=1}^k p_i \dot{q}_i \right) - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k, \dot{q}_{k+1}, \dots, \dot{q}_n, t),$$

wobei \dot{q}_i für $1 \leq i \leq k$ aus

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

bestimmt wird. Die Funktion R wird als **Routhsche Funktion** bezeichnet. Aus dieser Funktion folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_i &= \frac{\partial R}{\partial p_i}, & 1 \leq i \leq k, \\ \frac{d}{dt} p_i &= -\frac{\partial R}{\partial q_i}, & 1 \leq i \leq k, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} &= 0, & (k+1) \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Für die ersten k Variablen haben wir also Differentialgleichungen vom Typ der Hamilton-Gleichungen, während wir für die restlichen $(n - k)$ Variablen Differentialgleichungen vom Typ der Euler-Lagrange-Gleichungen finden.

Bemerkung: Das Routhsche Verfahren ist besonders dann vorteilhaft, falls die ersten k Variablen zyklisch sind. Die k konjugierten Impulse p_i sind dann konstant, d.h.

$$\frac{d}{dt} p_i = 0, \quad 1 \leq i \leq k,$$

und die Lösung des Problems reduziert sich auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q_i &= \frac{\partial R}{\partial p_i}, & 1 \leq i \leq k, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial R}{\partial q_j} &= 0, & (k+1) \leq j \leq n.\end{aligned}$$

Dies ist ein System von k Differentialgleichungen erster Ordnung und $(n - k)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zur Lösung sind daher noch $k + 2(n - k) = 2n - k$ Integrationen durchzuführen.

5 Anwendungen

5.1 Der starre Körper

Bisher haben wir uns in der Mechanik immer mit idealisierten Massenpunkten beschäftigt. Wir wollen nun auch ausgedehnte Körper betrachten. Das einfachste Modell eines ausgedehnten Körpers ist das eines **starren Körpers**. Hierbei wird angenommen, daß der Körper nicht deformierbar ist. Es treten daher unter dieser Annahme insbesondere keine inneren Schwingungen auf.

Wir können uns einen starren Körper durch n Punktteilchen der Massen m_i , $1 \leq i \leq n$ aufgebaut vorstellen, eventuell mit elektrischen Ladungen q_i . Wir sind an den Eigenschaften des starren Körpers für großes n interessiert. Wir werden daher im folgenden immer $n \geq 3$ voraussetzen, dies schließt einige degenerierte Spezialfälle für $n = 1$ oder $n = 2$ aus. Da der Körper starr sein soll, fordern wir, daß die relativen Abstände der Massenpunkte konstant sind, d.h.

$$|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = \text{const}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Für $n = 2$ legt dies genau eine Zwangsbedingung fest, für $n = 3$ sind es drei Zwangsbedingungen, für $n > 3$ kommen für jedes weitere Teilchen drei weitere Zwangsbedingungen hinzu. Wir haben also für $n \geq 3$ immer

$$3n - 6$$

Zwangsbedingungen. Wir haben also ein physikalisches System mit $(3n)$ Koordinaten und $(3n - 6)$ Zwangsbedingungen. Somit hat der starre Körper

$$(3n) - (3n - 6) = 6$$

Freiheitsgrade. Wir können den starren Körper daher durch sechs verallgemeinerte Koordinaten beschreiben. Es bietet sich an, hierfür die drei Schwerpunktskoordinaten

$$\vec{X} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i,$$

und drei Winkelkoordinaten, die die Orientierung des starren Körpers im Raum beschreiben, zu verwenden. Wir können die Koordinaten eines jeden Massenpunktes durch

$$\vec{x}_i(t) = \vec{X}(t) + R(t) \cdot (\vec{x}_i(0) - \vec{X}(0))$$

angeben. Hierbei ist $R(t)$ eine 3×3 -Matrix aus der Gruppe $SO(3)$. Die Matrix $R(t)$ beschreibt die Drehung bzw. Orientierung des starren Körpers im Raum. Für jede $SO(3)$ -Matrix gilt

$$R^T = R^{-1}, \quad \det R = 1.$$

Wir können die Drehmatrix R durch drei Euler-Winkel parametrisieren:

$$R = A_z(\alpha) \cdot B_x(\beta) \cdot C_z(\gamma),$$

wobei

$$A_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_x(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, C_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die drei Euler-Winkel α , β und γ vervollständigen den Satz der verallgemeinerten Koordinaten. Wir fassen zusammen: Die sechs Freiheitsgrade eines starren Körpers können durch die drei Schwerpunktskoordinaten X_1 , X_2 und X_3 , sowie durch die drei Euler-Winkel α , β und γ beschrieben werden.

Wir verwenden nun die Notation

$$\vec{\xi}^{(i)} = \vec{x}_i(0) - \vec{X}(0).$$

Der Vektor $\vec{\xi}^{(i)}$ beschreibt also die Differenz des Ortsvektors des i -ten Massenpunktes zum Ortsvektor des Schwerpunkts zur Zeit $t = 0$.

Für die Geschwindigkeit des i -ten Massenpunktes gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}_i(t) &= \dot{\vec{X}}(t) + \dot{R}(t) \cdot (\vec{x}_i(0) - \vec{X}(0)) \\ &= \dot{\vec{X}}(t) + \dot{R}(t) \cdot \vec{\xi}^{(i)}. \end{aligned}$$

Da R eine orthogonale Matrix ist, folgt aus

$$R^T \cdot R = \mathbf{1}$$

durch Ableiten

$$\dot{R}^T \cdot R + R^T \cdot \dot{R} = \mathbf{0},$$

und somit

$$R^T \cdot \dot{R} = -\dot{R}^T \cdot R = -(R^T \cdot \dot{R})^T.$$

$(R^T \cdot \dot{R})$ ist also eine antisymmetrische Matrix. Wir betrachten nun die gesamte kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{x}}_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{X}} + \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right)^T \cdot \left(\dot{\vec{X}} + \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{\xi}^{(i)T} \cdot \dot{R}^T \cdot \dot{\vec{X}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{\xi}^{(i)T} \cdot \dot{R}^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)}. \end{aligned}$$

Nun ist allerdings

$$\sum_{i=1}^n m_i \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} = \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{\xi}^{(i)} \right) = \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \left[\sum_{i=1}^n m_i (\vec{x}_i(0) - \vec{X}(0)) \right]$$

$$= \dot{\vec{X}}^T \cdot \dot{R} \cdot \left(M\vec{X}(0) - M\vec{X}(0) \right) = 0.$$

Ebenso findet man

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{\xi}^{(i)T} \cdot \dot{R}^T \cdot \dot{\vec{X}} = 0.$$

Somit reduziert sich die kinetische Energie auf

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{\xi}^{(i)T} \cdot \dot{R}^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \vec{\xi}^{(i)T} \cdot \dot{R}^T \cdot R \cdot R^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \\ &= \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(R^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right)^2. \end{aligned}$$

Nun wissen wir aber schon, daß $(R^T \cdot \dot{R})$ antisymmetrisch ist. Daher gibt es Größen ω_1, ω_2 und ω_3 , so daß

$$(R^T \cdot \dot{R}) \cdot \vec{\xi}^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\xi}^{(i)} = \vec{\omega} \times \vec{\xi}^{(i)},$$

wobei wir $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ gesetzt haben. Die Größen $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ werden als **Winkelgeschwindigkeiten** bezeichnet. Aufgrund der Identität

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

erhalten wir für die kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\omega}^2 \xi^{(i)2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\xi}^{(i)})^2 \right).$$

Wir definieren nun den **Trägheitstensor** eines starren Körpers durch

$$I_{ij} = \sum_{k=1}^n m_k \left(\xi^{(k)2} \delta_{ij} - \xi_i^{(k)} \xi_j^{(k)} \right).$$

Der Trägheitstensor ist ein Tensor zweiter Stufe und läßt sich durch eine 3×3 -Matrix angeben. Mit Hilfe des Trägheitstensors läßt sich die kinetische Energie nun wie folgt schreiben:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega}.$$

Der zweite Term beschreibt die Rotationsenergie. Die gesamte kinetische Energie läßt sich also als die Summe der kinetischen Energie der Schwerpunktsbewegung und der Rotationsenergie schreiben.

Aus der Definition des Trägheitstensor ist unmittelbar ersichtlich, daß der Tensor symmetrische ist:

$$I_{ij} = I_{ji}.$$

Nun besagt ein Satz aus der linearen Algebra, daß eine reelle symmetrische Matrix immer durch eine orthogonale Matrix auf Diagonalform gebracht werden kann, d.h. man findet $O \in SO(3, \mathbb{R})$ so daß

$$O^T \cdot I \cdot O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte λ_1 , λ_2 und λ_3 werden auch als **Hauptträgheitsmomente** bezeichnet. Die Rotationsmatrix beschreibt nichts anderes als eine Rotation des Koordinatensystems zum Zeitpunkt $t = 0$. Wählt man nun das Koordinatensystem so, daß der Trägheitstensor Diagonalgestalt hat, so sind die Hauptträgheitsmomente gegeben durch

$$\lambda_1 = \sum_{k=1}^n m_k \left(\xi_2^{(k)2} + \xi_3^{(k)2} \right), \quad \lambda_2 = \sum_{k=1}^n m_k \left(\xi_3^{(k)2} + \xi_1^{(k)2} \right), \quad \lambda_3 = \sum_{k=1}^n m_k \left(\xi_1^{(k)2} + \xi_2^{(k)2} \right).$$

Dies zeigt, daß die Hauptträgheitsmomente immer größer gleich Null.

Bemerkung: Die obigen drei Formeln gelten nur in dem Koordinatensystem, in dem der Trägheitstensor diagonal ist. Man findet dieses Koordinatensystem (und die Hauptträgheitsmomente) durch Aufstellen des Trägheitstensors in einem beliebigen Koordinatensystem und der anschließenden Diagonalisierung.

Bezüglich der Hauptträgheitsmomente kann man nun die folgenden drei Fälle unterscheiden:

- Alle Eigenwerte sind paarweise verschieden. Man spricht hier auch von einem **unsymmetrischen Kreisel**.
- Zwei Eigenwerte sind gleich, während der dritte Eigenwert hiervon verschieden ist. In diesem Fall spricht man von einem **symmetrischen Kreisel**.
- Alle drei Eigenwerte sind gleich. Dieser Fall wird auch als **Kugelkreisel** bezeichnet.
Bemerkung: Es wird nur gefordert, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ gilt. Hieraus folgt im allgemeinen nicht, daß der starre Körper Kugelgestalt hat.

Betrachten wir nun den Gesamtdrehimpuls des starren Körpers. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{X} + R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \left(\dot{\vec{X}} + \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \\ &= M \vec{X} \times \dot{\vec{X}} + \sum_{i=1}^n m_i \left[\vec{X} \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) + \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \dot{\vec{X}} + \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= M\vec{X} \times \dot{\vec{X}} + \sum_{i=1}^n m_i \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right).$$

Die mittleren Terme verschwinden wieder wegen

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{\xi}^{(i)} = 0.$$

Betrachten wir nun eine Relation der Form $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ und transformieren wir diese Relation mit einer Matrix $R^T \in SO(3, \mathbb{R})$, so lautet die transformierte Relation $R^T \vec{c} = (R^T \vec{a}) \times (R^T \vec{b})$. Auflösen nach \vec{c} liefert die Identität

$$\vec{a} \times \vec{b} = R \cdot \left[(R^T \cdot \vec{a}) \times (R^T \cdot \vec{b}) \right].$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) &= \sum_{i=1}^n m_i R \cdot \left[\left(R^T \cdot R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \left(R^T \cdot \dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n m_i R \cdot \left[\vec{\xi}^{(i)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\xi}^{(i)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Aufgrund der Identität

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c} \right) \vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \vec{c}$$

ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \left(\dot{R} \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^n m_i R \cdot \left(\vec{\xi}^{(i)2} \vec{\omega} - \vec{\xi}^{(i)} \left(\vec{\xi}^{(i)} \cdot \vec{\omega} \right) \right) = R \cdot I \cdot \vec{\omega}.$$

Somit erhalten wir für den Gesamtdrehimpuls

$$\vec{L} = M\vec{X} \times \dot{\vec{X}} + R \cdot I \cdot \vec{\omega}.$$

Der Gesamtdrehimpuls setzt sich also zusammen aus einem Bahndrehimpuls, der durch die Schwerpunktsbewegung gegeben ist und einem Rotationsdrehimpuls, der durch den zweiten Term beschrieben wird.

Wir bezeichnen mit \vec{K}_i die (äußere) Kraft, die auf den i -ten Massenpunkt wirkt. Somit ist das gesamte Drehmoment, welches auf den starren Körper wirkt, gegeben durch

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \times \vec{K}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{X} + R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \vec{K}_i = \vec{X} \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{K}_i \right) + \sum_{i=1}^n \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \vec{K}_i$$

Der letzte Term läßt sich noch etwas umformen:

$$\sum_{i=1}^n \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \vec{K}_i = \sum_{i=1}^n \left(R \cdot \vec{\xi}^{(i)} \right) \times \left(R \cdot R^T \cdot \vec{K}_i \right) = R \cdot \left[\sum_{i=1}^n \vec{\xi}^{(i)} \times \left(R^T \cdot \vec{K}_i \right) \right].$$

Somit lautet das Drehmoment also

$$\vec{M} = \vec{X} \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{K}_i \right) + R \cdot \left[\sum_{i=1}^n \vec{\xi}^{(i)} \times \left(R^T \cdot \vec{K}_i \right) \right].$$

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen des starren Körpers betrachten. Wir nehmen an, daß auf die Massenpunkte nur konservative Kräfte wirken. Die Kräfte können somit durch ein Potential beschrieben werden. Da per Definition der Körper starr sein soll, ändern sich die relativen Abstände zwischen den Massenpunkten nicht. Daher liefern in der Potentialfunktion Terme der Form

$$V(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$$

nur **konstante** Beiträge und können daher ignoriert werden. Wäre der Körper deformierbar, so würden diese Terme innere Kräfte beschreiben. Es genügt daher, sich für das Potential auf äußere Kräfte zu beschränken.

Als verallgemeinerte Koordinaten des starren Körpers wählen wir die drei Schwerpunktskoordinaten X_1 , X_2 und X_3 , sowie die drei Euler-Winkel α , β und γ , welche die Orientierung des starren Körpers im Raum beschreiben. Die verallgemeinerten Geschwindigkeiten sind dann $\dot{\vec{X}}$, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$. Die Lagrange-Funktion des starren Körpers lautet

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{\vec{X}}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T I \vec{\omega} - V(\vec{X}, \alpha, \beta, \gamma)$$

Wir müssen allerdings noch die Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}$ durch unsere verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten ausdrücken. Nun hatten wir allerdings die Größen ω_1 , ω_2 und ω_3 definiert durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} = R^T \cdot \dot{R}.$$

Die Rotationsmatrix R war gegeben durch

$$R = A_z(\alpha) \cdot B_x(\beta) \cdot C_z(\gamma),$$

wobei die einzelnen Drehmatrizen wie folgt definiert wurden:

$$A_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_x(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, C_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Setzt man nun ein, so findet man

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\gamma} \cos \beta, \\ \omega_2 &= -\dot{\alpha} \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma, \\ \omega_3 &= -\dot{\gamma}.\end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 und ω_3 hängen also von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und $\dot{\gamma}$ ab, aber auch von den verallgemeinerten Koordinaten α , β und γ .

Man findet nun als Bewegungsgleichungen sechs Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die ersten drei beschreiben die Schwerpunktsbewegung:

$$M\ddot{X}_i = -\frac{\partial V(\vec{X}, \alpha, \beta, \gamma)}{\partial X_i}.$$

Für die verbleibenden drei Gleichungen findet man

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i,j=1}^3 \omega_i I_{ij} \frac{\partial \omega_j}{\partial \dot{\varphi}} \right) = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \sum_{i,j=1}^3 \omega_i I_{ij} \frac{\partial \omega_j}{\partial \varphi}, \quad \varphi \in \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Diese drei Gleichungen lassen sich auf zwei verschiedene Arten eleganter schreiben. Die erste Version ist bereits aus der Experimentalphysik bekannt und setzt die Änderung des Drehimpulses in Beziehung zum Drehmoment:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}.$$

Eine zweite Form geht auf Euler zurück und lautet

$$I \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}^{(i)} \times (R^T \cdot \vec{K}_i).$$

Diese Gleichung wird als **Euler-Gleichung** bezeichnet.

Die Herleitung dieser beiden Formen der Bewegungsgleichung aus der Euler-Lagrange-Gleichung ist etwas langwierig. Allerdings kann die Euler-Gleichung relativ leicht aus der Gleichung für den Drehimpuls hergeleitet werden: Setzen wir in

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$$

die Ausdrücke für \vec{L} und \vec{M} ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt} \left[M\vec{X} \times \dot{\vec{X}} + R \cdot I \cdot \vec{\omega} \right] = \vec{X} \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{K}_i \right) + R \cdot \left[\sum_{i=1}^n \vec{\xi}^{(i)} \times (R^T \cdot \vec{K}_i) \right].$$

Nun ist die Änderung des Bahndrehimpulses gleich dem ersten Term auf der rechten Seite, daher gilt

$$\frac{d}{dt}(R \cdot I \cdot \vec{\omega}) = R \cdot \left[\sum_{i=1}^n \vec{\xi}^{(i)} \times (R^T \cdot \vec{K}_i) \right],$$

bzw.

$$R^T \cdot \frac{d}{dt}(R \cdot I \cdot \vec{\omega}) = \sum_{i=1}^n \vec{\xi}^{(i)} \times (R^T \cdot \vec{K}_i).$$

Die linke Seite läßt sich wie folgt vereinfachen

$$R^T \cdot \frac{d}{dt}(R \cdot I \cdot \vec{\omega}) = R^T \cdot (R \cdot I \cdot \dot{\vec{\omega}} + \dot{R} \cdot I \cdot \vec{\omega}) = I \cdot \dot{\vec{\omega}} + R^T \cdot \dot{R} \cdot I \cdot \vec{\omega} = I \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}).$$

Somit erhalten wir die Eulersche Gleichung.

Als ein Beispiel betrachten wir einen starren Körper, auf den keine äußeren Kräfte einwirken. Durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystem können wir erreichen, daß der Trägheitstensor Diagonalgestalt hat:

$$I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Die Euler-Gleichung

$$I \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (I \cdot \vec{\omega}) = 0$$

vereinfacht sich zu den Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 \dot{\omega}_1 &= (\lambda_2 - \lambda_3) \omega_2 \omega_3, \\ \lambda_2 \dot{\omega}_2 &= (\lambda_3 - \lambda_1) \omega_1 \omega_3, \\ \lambda_3 \dot{\omega}_3 &= (\lambda_1 - \lambda_2) \omega_1 \omega_2. \end{aligned}$$

Für einen symmetrischen Kreisel gilt $\lambda_1 = \lambda_2$ und somit

$$\dot{\omega}_3 = 0,$$

und daher

$$\omega_3(t) = \text{const.}$$

Das System reduziert sich daher auf

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \omega_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1} \omega_3.$$

Als Lösung findet man

$$\omega_1(t) = \omega_{\perp} \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad \omega_2(t) = \omega_{\perp} \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

ω_{\perp} und φ_0 werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Die Winkelgeschwindigkeit des kräftefreien symmetrischen Kreisels rotiert also mit ω_0 um die Achse des Hauptträgheitsmoments λ_3 .

Die Behandlung des starren Körpers, den wir bisher durch eine endliche Anzahl starr miteinander verbundener Massepunkte beschrieben haben, läßt sich auch ohne größere Probleme auf eine kontinuierliche Massenverteilung verallgemeinern. Für die Gesamtmasse hat man in diesem Fall

$$M = \int d^3x \rho(\vec{x}),$$

wobei $\rho(\vec{x})$ die Massendichte ist. Der Schwerpunkt ist gegeben durch

$$\vec{X} = \frac{1}{M} \int d^3x \rho(\vec{x}) \vec{x}.$$

Für den Trägheitstensor findet man

$$I_{ij} = \int d^3\xi \rho(\vec{x}(0)) \left(\xi^2 \delta_{ij} - \xi_i \xi_j \right),$$

wobei die Notation $\vec{\xi} = \vec{x}(0) - \vec{X}(0)$ verwendet wurde.

5.2 Kleine Schwingungen

Wir haben bei der Diskussion des starren Körpers angenommen, daß die relativen Abstände der einzelnen Massepunkte zueinander konstant sind. Diese Annahme hat die Anzahl der Freiheitsgrade für ein System mit $n \geq 3$ Massepunkte auf sechs Freiheitsgrade reduziert. Anschaulich entsprechen diese sechs Freiheitsgrade der Schwerpunktsbewegung und der Rotation des starren Körpers.

Eine realistischere Beschreibung würde dagegen nicht die Annahme machen, daß die relativen Abstände der einzelnen Massepunkte zueinander konstant sind, sondern durch die etwas schwächere Annahme ersetzen, daß die Änderungen der relativen Abstände klein sind gegenüber den Änderungen der oben erwähnten sechs verallgemeinerten Koordinaten. Wir wollen weiter annehmen, daß die Änderung der relativen Abstände um eine Gleichgewichtslage herum stattfindet. Auch in diesem Fall können wir die makroskopischen Eigenschaften der Schwerpunktsbewegung und der Rotation wie beim starren Körper beschreiben. Hinzu kommen nun noch kleine Schwingungen der relativen Abstände. Diese wollen wir nun betrachten. Da wir die Bewegungsgleichungen für die Schwerpunkts- und Rotationsfreiheitsgrade schon behandelt haben, konzentrieren wir uns nur auf die Schwingungsfreiheitsgrade.

Wir wollen ein konservatives System mit n Freiheitsgraden betrachten. Da das System konservativ ist, wird die potentielle Energie durch ein Potential

$$V(\vec{q})$$

beschrieben. Wir wollen weiter annehmen, daß dieses Potential ein Minimum an der Stelle $\vec{q} = \vec{q}_0$ besitzt. Mathematisch ausgedrückt fordern wir

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{\vec{q}_0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_0} \text{ ist positiv definit.}$$

Die kinetische Energie des Systems läßt sich allgemein als

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

schreiben, wobei $C_{ij}(\vec{q}) = C_{ji}(\vec{q})$ gilt.

Die Gleichgewichtslage ist durch

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_0, \quad \dot{\vec{q}}(t) = \vec{0}$$

gegeben. Wir wollen nun kleine Auslenkungen von der Gleichgewichtslage betrachten. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\eta_i(t) = q_i(t) - q_i(0), \quad \dot{\eta}_i(t) = \dot{q}_i(t)$$

und entwickeln die kinetische Energie und die potentielle Energie in den kleinen Größen $\vec{\eta}$ und $\dot{\vec{\eta}}$ bis zur quadratischen Ordnung. Wir haben

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}(\vec{q}_0) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j + O(\eta \dot{\eta}^2),$$

$$V = V(\vec{q}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_0} \eta_i \eta_j + O(\eta^3).$$

In der Entwicklung der Potentialfunktion verschwindet der Term linear in $\vec{\eta}$ wegen der Voraussetzung, daß an der Stelle $\vec{q} = \vec{q}_0$ ein Minimum vorliegt. Den konstanten Term $V(\vec{q}_0)$ in der Entwicklung der Potentialfunktion können wir in der weiteren Betrachtung ignorieren. Setzen wir

$$T_{ij} = C_{ij}(\vec{q}_0), \quad V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\vec{q}_0},$$

so können wir das System durch die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V_{ij} \eta_i \eta_j$$

beschreiben. Wir bemerken, daß T_{ij} und V_{ij} nicht von den Variablen $\vec{\eta}$ und $\dot{\vec{\eta}}$ abhängen. T_{ij} und V_{ij} definieren jeweils reelle symmetrische $(n \times n)$ -Matrizen. Aufgrund eines Satzes aus der linearen Algebra folgt daher, daß sie jeweils reelle Eigenwerte haben. Wir wissen darüber hinaus, daß V_{ij} positiv definit ist. (V_{ij} ist Hessesche Matrix am Punkte des Minimums.) Daher sind alle Eigenwerte von V_{ij} positiv. Wir fordern nun weiter, daß auch die Matrix T_{ij} positiv definit ist. Dies ist eine vernünftige Annahme. Wäre T_{ij} nicht positiv definit, so könnten wir eine Geschwindigkeitskomponente immer weiter erhöhen, ohne daß die kinetische Energie zunimmt. Ist T_{ij} positiv definit, so hat auch T_{ij} nur positive Eigenwerte. Sind alle Eigenwerte positiv, so folgt sofort daß die Determinante ungleich Null ist und die Matrix daher invertierbar ist.

Fassen wir kurz zusammen: T_{ij} und V_{ij} sind reelle symmetrische Matrizen, die positiv definit sind. Insbesondere sind sie invertierbar.

Aus der Lagrange-Funktion folgen nun die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_{j=1}^n V_{ij} \eta_j = 0.$$

Wir können diese Gleichungen auch in Matrixschreibweise angeben:

$$T \cdot \ddot{\vec{\eta}} + V \cdot \vec{\eta} = \vec{0}.$$

Dies ist ein System von n linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Da T invertierbar ist, kann diese Gleichung auch wie folgt geschrieben werden:

$$\ddot{\vec{\eta}} + A \cdot \vec{\eta} = \vec{0}, \quad A = T^{-1} \cdot V.$$

Allerdings verliert man hier die Eigenschaft, daß man mit symmetrischen Matrizen arbeitet. Sind B und C symmetrische und invertierbare Matrizen ($B^T = B$ und $C^T = C$), so kann zwar zeigen, daß auch die Inversen wieder symmetrisch sind, allerdings ist das Produkt im allgemeinen nicht symmetrisch:

$$(B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T = C \cdot B.$$

Wir sehen also, daß das Produkt nur dann symmetrisch ist, falls B und C kommutieren.

Daher wählt man zur Lösung der Bewegungsgleichungen üblicherweise einen Weg, der immer im Bereich der symmetrischen Matrizen bleibt. Wir gehen hierzu in drei Schritten vor: Ausgehend von der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{\eta}}^T \cdot T \cdot \dot{\vec{\eta}} - \frac{1}{2} \vec{\eta}^T \cdot V \cdot \vec{\eta}.$$

diagonalisieren wir im ersten Schritt die Matrix T . Da T symmetrisch ist, ist die Transformationsmatrix O_1 orthogonal. Wir haben also

$$O_1^T \cdot T \cdot O_1 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Setzen wir

$$\bar{\eta}' = O_1^T \cdot \bar{\eta},$$

so lautet unsere Lagrange-Funktion nun

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}'^T \cdot (O_1^T \cdot T \cdot O_1) \cdot \dot{\bar{\eta}}' - \frac{1}{2} \bar{\eta}'^T \cdot (O_1^T \cdot V \cdot O_1) \cdot \bar{\eta}'.$$

Im zweiten Schritt reskalieren wir nun alle Variablen mit den Wurzeln der im ersten Schritt bestimmten Eigenwerte:

$$\bar{\eta}'' = S \cdot \bar{\eta}', \quad S = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n}).$$

Wir haben nun

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}''^T \cdot (S^{-1} \cdot O_1^T \cdot T \cdot O_1 \cdot S^{-1}) \cdot \dot{\bar{\eta}}'' - \frac{1}{2} \bar{\eta}''^T \cdot (S^{-1} \cdot O_1^T \cdot V \cdot O_1 \cdot S^{-1}) \cdot \bar{\eta}''.$$

Nun ist allerdings

$$S^{-1} \cdot O_1^T \cdot T \cdot O_1 \cdot S^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right) \cdot \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\right) = \mathbf{1},$$

und somit vereinfacht sich die Lagrange-Funktion zu

$$L = \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}''^T \cdot \dot{\bar{\eta}}'' - \frac{1}{2} \bar{\eta}''^T \cdot (S^{-1} \cdot O_1^T \cdot V \cdot O_1 \cdot S^{-1}) \cdot \bar{\eta}''.$$

Die Matrix

$$V'' = S^{-1} \cdot O_1^T \cdot V \cdot O_1 \cdot S^{-1}$$

ist wieder symmetrisch und kann nun im dritten Schritt durch eine orthogonale Transformation O_2 diagonalisiert werden:

$$O_2^T \cdot V'' \cdot O_2 = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2).$$

Da V als positiv definit vorausgesetzt war, sind auch hier alle Eigenwerte positiv. Wir haben sie daher als Quadrate reeller Zahlen ω_i geschrieben. Wir setzen nun

$$\vec{\xi} = O_2^T \cdot \bar{\eta}'',$$

und erhalten die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{\xi}}^T \cdot \dot{\vec{\xi}} - \frac{1}{2} \vec{\xi}^T \cdot \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_n^2) \cdot \vec{\xi}.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen dieser Lagrange-Funktion lauten

$$\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dies sind n Gleichungen vom Typ eines harmonischen Oszillators. Sie sind nicht gekoppelt. Die Lösungen sind daher

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

wobei $\xi_i(0)$ und φ_i durch die Anfangsbedingungen zu bestimmen sind. Die Koordinaten ξ_i werden auch als **Normalkoordinaten** bezeichnet. Die Kreisfrequenzen ω_i bezeichnet man als **Eigenfrequenzen**.

Wir fassen zusammen: Kleine Auslenkungen von der Gleichgewichtslage führen zu Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Durch eine geeignete Wahl der n verallgemeinerten Koordinaten können wir erreichen, daß das System durch n entkoppelte Schwingungen beschrieben wird. Man spricht von Eigenschwingungen, die zugehörigen Kreisfrequenzen werden als Eigenfrequenzen bezeichnet.