

Aufgabe 1: Stammfunktionen Teil 1

Gegeben sind jeweils eine Funktion $f(x)$ mit zugehöriger Stammfunktion $F(x)$ in ihrer allgemeinen Form. Weisen Sie jeweils durch explizite Rechnung nach, dass $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ ist und bestimmen Sie – falls vorhanden – die unbekanntenen Parameter.

(a) $f(x) = 18x^{17}$, $F(x) = x^n$

(b) $f(x) = \sin^2 x$, $F(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$

(c) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $F(x) = \frac{n}{n+1}(\sqrt[n]{x})^{n+1}$

(d) Bonus: $f(x) = x^3 \ln x$, $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right)$

Aufgabe 2: Stammfunktionen Teil 2

Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x)$ zu $f(x)$, die die angegebenen Randbedingungen erfüllt:

(a) $f(x) = 3x$ mit $F(1) = 2$

(b) $f(x) = 2x + 3$ mit $F(1) = 0$

(c) $f(x) = \cos x$ mit $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

(d) $f(x) = 6x^2 + 5x$ mit $F(1) = 0$

Aufgabe 3: Unbestimmte Integrale

Berechnen Sie die Stammfunktionen folgender unbestimmter Integrale:

(a) $\int x^4 dx$

(b) $\int e^{2x} dx$

(c) $\int \sin 5x \, dx$

(d) $\int \tan x \, dx$

(e) $\int x e^{2x} \, dx$

(f) $\int t \cos(t^2 + 1) \, dt$

(g) Bonus: $\int \frac{x}{x^2 - 1} \, dx$

Aufgabe 4: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie:

(a) $\int_0^{\pi/2} 3 \cos x \, dx$

(b) $\int_3^0 x^2 \, dx$

(c) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos t \, dt$

(d) $\int_0^1 (5x - 4)^3 \, dx$

(e) $\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{2x^3 + 4} \, dx$

(f) Bonus: $\int_{-17}^{+17} x \cdot (9x^6 + 2x^2)^{18} \, dx =$

Aufgabe 5: Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie:

(a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

(b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

Aufgabe 6: Bonus: Anwendungsbeispiel

Im Gravitationsfeld eines Himmelskörpers der Masse M ist die Gravitationskraft F , die auf einen Körper der Masse m wirkt, der sich im Abstand x vom Mittelpunkt des Himmelskörpers befindet, gegeben durch $F = G \frac{Mm}{x^2}$ mit der Gravitationskonstante G .

Damit ist die Arbeit, um die Masse m gegen die Anziehungskraft F um ein kleines Stück dx vom Himmelskörper weg zu bewegen:

$$dW = F dx = G \frac{Mm}{x^2} dx.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um den Körper von der Entfernung x_0 komplett aus dem Gravitationsfeld zu entfernen ($x_1 \rightarrow \infty$).