Übungsblatt 10

Aufgabe 1: Differentialgleichungen I

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen die gegebenen Differentialgleichungen erfüllen.

(a) $y(x) = c_1 e^x, \quad y' - y = 0$

(b) $y(x) = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x), \quad y'' + y = 0$

(c) $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad y'' - 2y' + y = 0$

(d) $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^x, \quad y''' - y' = 0$

Aufgabe 2: Fadenpendel

Für ein Fadenpendel der Länge l mit Masse m kann die rücktreibende Kraft für kleine Winkel durch

$$F = -mg\frac{x(t)}{l}$$

mit konstantem Ortsfaktor g und horizontaler Auslenkung $x(t)$ dargestellt werden.

(a) Stellen Sie mit Hilfe des Newtonschen Gesetzes $F = m\ddot{x}$ die zugehörige Differentialgleichung auf.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = v(0) = 0$.

(c) Bestimmen Sie mit der Lösung von b) die Periodendauer der Schwingung des Fadenpendels mit Länge l.

Aufgabe 3: Differentialgleichungen II

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen mit separierten Variablen.

(a) $y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0$

(b) $y' = \frac{cosx}{y}, \quad y \neq 0$

(c) $y' = \frac{2x}{e^y}$

(d) $y'(x^2+1) - 2xy = 0$

Aufgabe 4: Kaffee und Milch

Der Abkühlungsprozess von Kaffee mit Temperatur u, Umgebungstemperatur a und konstanter Abkühlungsrate $k > 0$ kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$u'(t) = -k(u(t) - a)$$

Sie haben einen zu heißen Kaffee, etwas kalte Milch, 10 Minuten Zeit und wollen den Kaffee möglichst kalt trinken. Geben Sie die kalte Milch zu Beginn oder Ende der 10 Minuten zum Kaffee hinzu? Begründen Sie.

Aufgabe 5: Virusausbreitung

(a) Die Ausbreitung eines Virus kann durch eine Differentialgleichung beschrieben werden. Die Anzahl an Neuinfektionen ist hierbei proportional zur Anzahl an bereits infizierten Personen. Beschreiben Sie diesen Zusammenhang in Form einer Differentialgleichung und lösen Sie diese.

(b) **Bonus**: Eine realistischere Beschreibung der Ausbreitung eines Virus erfolgt durch eine sogenannte logistische Differentialgleichung

$$y'(t) - ky(t)(L - y(t)) = 0$$

mit konstanten Parametern k und L. Lösen Sie die Differentialgleichung und erläutern Sie, warum diese eine bessere Beschreibung für den Verlauf einer Epidemie bietet. Wie ist der Parameter L zu interpretieren?