

Aufgabe 1: Skalar- und Vektorfelder

Welche der folgenden Beispiele sind Skalarfelder, welche Vektorfelder?

- (a) Luftdruck
- (b) Magnetfeld
- (c) Gravitationsfeld
- (d) Dichte
- (e) Temperatur
- (f) Mobiltelefon-Signalstärke
- (g) Ein Feld an Windgeschwindigkeiten

Aufgabe 2: Gradienten

Berechnen Sie die Gradienten $\vec{\nabla} f$ folgender Felder:

(a) $f(x,y,z) = x + y^2 + z^3$

(b) $f(x,y,z) = e^x z^3 - yz x^2$

(c) $f(x,y,z) = e^{xy} x^3 + z^2$

(d) $f(x,y,z) = y^2 \sin x - \sqrt{yzx^2}$

(e) $f(x,y,z) = \ln(e^{e^x z^3 - yz x^2})$

Aufgabe 3: Wind als 2D-Vektorfeld

Betrachten Sie einen quadratischen Landschaftsausschnitt der Fläche $1\,000\text{ km} \times 1\,000\text{ km}$, wobei der Nord-Süd-Verlauf durch die Variable y , der West-Ost-Verlauf durch die Variable x beschrieben wird.

Im Süden (d.h. bei $y = 0$) weht der Wind ausschließlich in y -Richtung, unabhängig von x , mit einer Geschwindigkeit von $v_y = 10\text{ m/s}$.

Im weiteren Verlauf Richtung Norden verändert sich diese Geschwindigkeit kontinuierlich, sodass im Norden (d.h. bei $y = 1\,000\text{ km}$) der Wind ausschließlich in x -Richtung, ebenfalls unabhängig von x , mit einer Geschwindigkeit von $v_x = 20\text{ m/s}$ weht.

- (a) Skizzieren Sie das Problem und stellen Sie dabei die Windgeschwindigkeiten als Vektorfeld grafisch dar.

- (b) Parametrisieren Sie das Vektorfeld der Form $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{pmatrix}$ mithilfe der gegebenen Bedingungen.

Aufgabe 4: Divergenz und Rotation von Vektorfeldern

Berechnen Sie die Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ und Rotation $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ folgender Vektorfelder:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(b) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -z \end{pmatrix}$

(c) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy + 2xz^2 + 3x^2 \\ x^2 + z^2 + 2y \\ 2yz + 2x^2z + 1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^5 - z^2 \\ 3y - 5 \\ ye^z \end{pmatrix}$

$$(e) \vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin z \\ \cos x \\ z^{-2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Potentialfelder

Ein Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x})$ heißt Potentialfeld, wenn es ein Skalarfeld $U(\vec{x})$ gibt, sodass $\vec{u} = \vec{\nabla}U$ gilt. Zeigen Sie, dass jedes Potentialfeld wirbelfrei ist.