Zahlen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen

- $\mathbb{N}$: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Die Axiome von Peano für die natürlichen Zahlen:

- *(P1) Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl.*
- *(P2) Falls n eine natürliche Zahl, so ist die nachfolgende Zahl $n + 1$ ebenfalls eine natürliche Zahl.*
- *(P3) Die natürlichen Zahlen sind die minimale Menge, welche die ersten beiden Axiome erfüllt.*

- $\mathbb{N}_0$: Die natürlichen Zahlen mit der Null $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Die natürlichen Zahlen

Sei $a, b \in \mathbb{N}$:

- Addition: $a + b \in \mathbb{N}$
- Aber: $a - b$ ist im Allgemeinen keine natürliche Zahl.
  Gegenbeispiel: $a = 1$ und $b = 3$.
- Multiplikation: $a \cdot b \in \mathbb{N}$
- Aber: a/b ist im Allgemeinen keine natürliche Zahl.
  Gegenbeispiel: $a = 1$ und $b = 3$.

Der Induktionsbeweis

Man ist oft in der Situation eine Aussage der Form

$$f(n) \quad = \quad g(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen zu müssen. Hier bietet sich der Induktionsbeweis an.

Der Induktionsbeweis verläuft in zwei Teilen:

1. Induktionsanfang: Im ersten Teil zeigt man zunächst, daß die Behauptung für $n = 1$ richtig ist.
2. Induktionsschritt: Im zweiten Teil nimmt man an, daß die Behauptung für $(n - 1)$ richtig ist und zeigt, daß sie dann auch für n richtig ist.

Der Induktionsbeweis

Man sieht leicht, daß dies die allgemeine Aussage beweist:

- Für $n = 1$ wird die Aussage im ersten Teil bewiesen.
- Für $n = 2$ können wir dann verwenden, daß die Aussage für $n = 1$ richtig ist.
  Somit liegt die Voraussetzung für den zweiten Teil vor und es folgt aufgrund des zweiten Teils die Richtigkeit für $n = 2$.
- Diese Argumentation läß sich nun fortsetzen:
  Da die Aussage für $n = 2$ richtig ist, muß sie aufgrund des zweiten Teils auch für $n = 3$ richtig sein, usw..

Der Induktionsbeweis

Beispiel

Für jede natürliche Zahl n ist die folgende Behauptung zu zeigen:

$$\sum_{j=1}^{n} j \quad = \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang:

Für $n = 1$ haben wir

$$\textit{linke Seite}: \quad \sum_{j=1}^{1} j = 1.$$

$$\textit{rechte Seite}: \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Der Induktionsbeweis

Induktionsschritt:

Wir dürfen nun annehmen, daß die Behauptung für $n - 1$ richtig ist, und müssen zeigen, daß sie dann auch für n gilt. In unserem Fall:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \left(\sum_{j=1}^{n-1} j \right) + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Abschnitt 2

Die ganzen Zahlen

Gruppen

Definition einer Gruppe:

Sei G eine nicht-leere Menge mit einer Verknüpfung $\circ$, d.h. eine Abbildung $\circ : G \times G \to G$. Das Paar $(G, \circ)$ ist eine Gruppe, falls:

- *(G1) $\circ$ ist assoziativ: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$*
- *(G2) Es gibt ein links-neutrales Element : $e \circ a = a$ für alle $a \in G$*
- *(G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein links-inverses Element a^{-1} : $a^{-1} \circ a = e$*

Eine Gruppe $(G, \circ)$ nennt man kommutativ oder Abelsch, falls $a \circ b = b \circ a$.

In einer Gruppe ist das links-neutrale Element identisch mit dem recht-neutralen Element.
Ebenso sind links- und rechts-inverses Element identisch.

Die ganzen Zahlen

$\mathbb{Z}$: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{...., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.
Die ganzen Zahlen bilden bezüglich der Addition eine Gruppe.

- Assoziativgesetz:
  Beispiel: $3 + (5 + 7) = (3 + 5) + 7$
- Die Null ist das links-neutrale Element:
  Beispiel: $0 + 7 = 7$.
- Das links-inverse Element zu a ist $(-a)$:
  Beispiel: Es ist $(-7) + 7 = 0$.
- Die Gruppe ist kommutativ:
  Beispiel: $5 + 7 = 7 + 5$.

Ringe

Definition eines Rings:

Ein **Ring** *ist eine nicht-leere Menge R mit zwei Verknüpfungen, die üblicherweise als* $+$ *und* $\cdot$ *geschrieben werden, so daß*

- *(R1)* $(R,+)$ *ist eine kommutative Gruppe.*
- *(R2)* $(R,\cdot)$ *ist assoziativ:* $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- *(R3) Es gelten die Distributivgesetze:*

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}$$

Die ganzen Zahlen

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden einen Ring.

- Assoziativgesetz:
  Beispiel: $3 \cdot (5 \cdot 7) = (3 \cdot 5) \cdot 7$
- Distributivgesetze:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (5 + 7) &= (3 \cdot 5) + (3 \cdot 7) \\ (3 + 5) \cdot 7 &= (3 \cdot 7) + (5 \cdot 7) \end{aligned}$$

Abschnitt 3

Die rationalen Zahlen

Die rationalen Zahlen

$\mathbb{Q}$: Die rationalen Zahlen.

$$\mathbb{Q} \;=\; \left\{ r \;\middle|\; r = \frac{p}{q},\;\; p, q \in \mathbb{Z},\; q \neq 0 \right\}.$$

Die rationalen Zahlen sind bezüglich der Division abgeschlossen. Sie bilden einen Körper.

Definition eines Körpers:

Eine nicht-leere Menge K mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ nennt man **Körper**, *falls gilt:*

- *(K1)* $(K, +)$ *ist eine kommutative Gruppe.*
- *(K2)* $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ *ist eine kommutative Gruppe.*
- *(K3) Es gelten die Distributivgesetze:*

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (a \cdot b) + (a \cdot c) \\ (a + b) \cdot c &= (a \cdot c) + (b \cdot c) \end{aligned}$$

Bruchrechnen

- Erweitern/Kürzen:

$$\frac{c \cdot p_1}{c \cdot q_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

- Multiplikation:

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- Division:

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Bruchrechnen

- Addition:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- Subtraktion:

$$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

Beispiele

- Erweitern/Kürzen:

$$\frac{15}{9} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{5}{3}$$

- Addition:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{9 + 10}{15} = \frac{19}{15}$$

- Division:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

Potenzen

Für Potenzen schreiben wir

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ mal}}$$

Rechnen mit Potenzen:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiele

- Gleicher Exponent:

$$2^7 \cdot 3^7 = (2 \cdot 3)^7 = 6^7$$

- Gleiche Basis:

$$2^5 \cdot 2^7 = 2^{(5+7)} = 2^{12}$$

- Potenz einer Potenz:

$$\left(3^2\right)^5 = 3^{(2 \cdot 5)} = 3^{10}$$

Quiz

$$\frac{x^{-1} x^3 x^5}{x^2 x^7} = ?$$

(A) 0

(B) 1

(C) x^2

(D) $\frac{1}{x^2}$

Die binomischen Formeln

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b\\ &= a^2-ab+ab-b^2\\ &= a^2-b^2\end{aligned}$$

Abschnitt 4

Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen

$\mathbb{R}$: Die reellen Zahlen.
Die reellen Zahlen bilden einen Körper.

- Alle rationalen Zahlen sind in den reellen Zahlen enthalten.
- $\mathbb{R}$ enthält Zahlen, die nicht rational sind. Diese nennt man irrational.
  - $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. $\sqrt{2}$ ist Lösung der Gleichung $x^2 = 2$. Zahlen, welche Lösungen einer algebraischen Gleichung sind, nennt man algebraisch.
  - $\mathbb{R}$ enthält auch irrationale Zahlen, die keine Lösung einer algebraischen Gleichung sind. Solche Zahlen nennt man transzendental. Die Kreiszahl π oder die Eulersche Konstante e sind transzendental.

Cauchy-Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen nennt man **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge konvergiert.

Anordnungseigenschaften

Die reellen Zahlen sind **angeordnet**:

Anordnungsaxiome:

Es sind gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet ($x > 0$), *so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:*

- *(O1) Es gilt genau eine der Beziehungen* $x < 0$, $x = 0$ *oder* $x > 0$.
- *(O2) Aus* $x > 0$ *und* $y > 0$ *folgt* $x + y > 0$.
- *(O3) Aus* $x > 0$ *und* $y > 0$ *folgt* $x \cdot y > 0$.

Man nennt eine Ordnung **archimedisch**, falls zu jedem $x > 0$ und $y > 0$ ein natürliche Zahl n exisiert, so daß

$$n \cdot x > y.$$

Die reellen Zahlen

Axiomatisch lassen sich die reellen Zahlen als ein Körper, der archimedisch angeordnet ist und in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, charakterisieren.

Lineare Gleichungen

Es seien $a \neq 0$ und b gegebene reelle Zahlen und x eine Unbekannte. Man nennt

$$ax + b = 0$$

eine lineare Gleichung für x.

Die Gleichung hat die Lösung

$$x = -\frac{b}{a}$$

Quadratische Gleichungen (*abc*-Formel)

Es seien $a \neq 0$, b und c gegebene reelle Zahlen und x eine Unbekannte. Man nennt

$$ax^2 + bx + c = 0$$

eine quadratische Gleichung für x.
Falls $D = b^2 - 4ac \geq 0$, so hat die Gleichung die Lösungen

$$x_{1/2} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

Quadratische Gleichungen (*pq*-Formel)

Da $a \neq 0$ können wir durch a teilen:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \end{aligned}$$

Setzen wir $p = b/a$ und $q = c/a$ so ergibt sich

$$x^2 + px + q = 0$$

Falls $D = p^2 - 4q \geq 0$, so hat die Gleichung die Lösungen

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Abschnitt 5

$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

Wir betrachten Zahlen der Form

$$a + b\sqrt{3}, \qquad a, b \in \mathbb{Q}$$

Wir bezeichnen die Menge dieser Zahlen als

$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{7}{8}\sqrt{3} &\in \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \\ \sqrt{7} &\notin \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \end{aligned}$$

Satz

$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ *ist ein Körper.*

- Addition:

$$\left(a_1 + b_1\sqrt{3}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{3}\right) \quad = \quad (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3}$$

- Multiplikation:

$$\begin{aligned}
&\left(a_1 + b_1\sqrt{3}\right) \cdot \left(a_2 + b_2\sqrt{3}\right) = \\
&= \quad a_1 a_2 + a_1 b_2 \sqrt{3} + b_1 a_2 \sqrt{3} + b_1 b_2 \left(\sqrt{3}\right)^2 \\
&= \quad a_1 a_2 + a_1 b_2 \sqrt{3} + b_1 a_2 \sqrt{3} + 3 b_1 b_2 \\
&= \quad (a_1 a_2 + 3 b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Neutrale Elemente

- Addition:

$$0 + \left(a + b\sqrt{3}\right) \;=\; \left(0 + 0 \cdot \sqrt{3}\right) + \left(a + b\sqrt{3}\right) \;=\; a + b\sqrt{3}$$

- Multiplikation:

$$1 \cdot \left(a + b\sqrt{3}\right) \;=\; \left(1 + 0 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(a + b\sqrt{3}\right) \;=\; a + b\sqrt{3}$$

Inverse Elemente

- Addition:

$$-\left(a+b\sqrt{3}\right) = (-a)+(-b)\sqrt{3}$$

- Multiplikation $(a,b) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+b\sqrt{3}} &= \frac{a-b\sqrt{3}}{\left(a+b\sqrt{3}\right)\left(a-b\sqrt{3}\right)}\\ &= \frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}\\ &= \frac{a}{a^2-3b^2}-\frac{b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Beispiel

Das zu $1+\sqrt{3}$ bezüglich der Multiplikation inverse Element ist

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{3}} &= \frac{1-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right) &= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 1
\end{aligned}$$

Bemerkung

Bei den Grundrechenarten mit Zahlen der Form $a + b\sqrt{3}$ ist der wesentliche Trick

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3.$$

Setzen wir $w = \sqrt{3}$ und betrachten Zahlen $a + bw$, so lautet der wesentliche Trick

$$w^2 = 3.$$

Quiz

$$i^2 \quad = \quad ?$$

(A) -1

(B) unbekannt