Komplexe Zahlen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Motivation und Definition

Motivation

Die reellen Zahlen enthalten algebraische Zahlen, so zum Beispiel die Lösungen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ der Gleichung

$$x^2 = 2.$$

Aber: Nicht jede algebraische Zahl ist eine reelle Zahl. So hat zum Beispiel die Gleichung

$$x^2 = -2$$

keine reellen Lösungen.

Definition der komplexen Zahlen

Definition

Man definiert die **imaginäre Einheit** i als eine Lösung der Gleichung

$$x^2 = -1.$$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind die Menge

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Analogie mit $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

Definition

Setzen wir $w = \sqrt{3}$, so ist w eine Lösung der Gleichung

$$w^2 = 3.$$

Der Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ist die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + bw \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

Definition der Addition und der Multiplikation:

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)\,, \\
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)
\end{aligned}
$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
(1 + 2i) + (3 + 4i) &= 4 + 6i \\
(1 + 2i) \cdot (3 + 4i) &= -5 + 10i
\end{aligned}
$$

Quiz

Sei $z_1 = 7 + 13i$ und $z_2 = 2 - 5i$.

$$z_1 + z_2 \quad = \quad ?$$

(A) $17i$

(B) $9 + 8i$

(C) $9 + 18i$

(D) $5 - 18i$

Quiz

Sei $z_1 = 5 + 9i$ und $z_2 = 2i$.

$$z_1 \cdot z_2 \quad = \quad ?$$

(A) $10 + 18i$

(B) $10 - 18i$

(C) $-18 + 10i$

(D) $18 + 10i$

Subtraktion und Division von komplexen Zahlen

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

Definition der Subtraktion und Division:

$$\begin{aligned}
z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)\,, \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\,(-x_1 y_2 + y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.
\end{aligned}$$

Subtraktion und Division von komplexen Zahlen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
(1+2i)-(3+4i) &= (1-3)+i\,(2-4) \\
&= -2-2i,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1+2i}{3+4i} &= \frac{(1+2i)\,(3-4i)}{(3+4i)\,(3-4i)} \\
&= \frac{(3+8)+i\,(6-4)}{9+16} \\
&= \frac{11}{25}+\frac{2}{25}i.
\end{aligned}
$$

Quiz

Sei $z_1 = 6 + 8i$ und $z_2 = 2i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = ?$$

(A) 10

(B) $3 + 4i$

(C) $4 - 3i$

(D) $4 + 3i$

Der Körper der komplexen Zahlen

- Mit dieser Addition und Multiplikation bilden die komplexen Zahlen einen Körper.
- Dieser Körper ist algebraisch abgeschlossen, d.h. die Nullstellen eines jeden Polynoms liegen in dem Körper.
- Der Körper ist allerdings nicht angeordnet.
- Das Vollständigkeitsaxiom gilt.

Nullstellen eines Polynoms

Es seien $c_n, c_{n-1}, \dots c_1, c_0 \in \mathbb{C}$. *Wir betrachten die Gleichung*

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0 \quad = \quad 0.$$

Diese Gleichung hat für die unbekannte Variable z *in* $\mathbb{C}$ *genau* n *Lösungen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.*

Anders ausgedrückt: Ein Polynom n*-ten Grades hat in* $\mathbb{C}$ *genau* n *Nullstellen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.*

Vielfachheiten

Beispiel

Betrachte das Polynom

$$(z-4)(z-5)^2$$

Die Nullstelle $z = 4$ hat die Vielfachtheit 1, die Nullstelle 5 hat die Vielfachtheit 2.
Das Polynom hat den Grad 3, es sollte also drei Nullstellen haben.
Eine einfache Nullstelle und eine doppelte Nullstelle ergibt

$$1+2 \quad = \quad 3.$$

Beispiel

Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$2z^2 - 8z + 26 = 0$$

Die Diskriminante ist

$$D = b^2 - 4ac = -144$$

Somit

$$z_{1/2} = \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{-144}\right) = \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{(-1)\cdot(12)^2}\right) = \frac{1}{4}(8 \pm 12i) = 2 \pm 3i$$

Real- und Imaginärteil

Definition

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl.
Man bezeichnet x als Realteil und y als Imaginärteil.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, z &= x, \\ \mathrm{Im}\, z &= y. \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, (3+5i) &= 3, \\ \mathrm{Im}\, (3+5i) &= 5. \end{aligned}$$

Konjugation

Definition

Die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl ist

$$z^* = x - iy.$$

Beispiel

$$(3 + 5i)^* = 3 - 5i$$

Rechenregeln

$$(z^*)^* = z,$$

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^*, \\
(z_1 - z_2)^* &= z_1^* - z_2^*, \\
(z_1 \cdot z_2)^* &= z_1^* \cdot z_2^*, \\
\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* &= \frac{z_1^*}{z_2^*},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + z^*), \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - z^*).$$

Betrag einer komplexen Zahl

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Es ist

$$z \cdot z^* \quad = \quad (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2.$$

Definition

Als Betrag der komplexen Zahl bezeichnet man

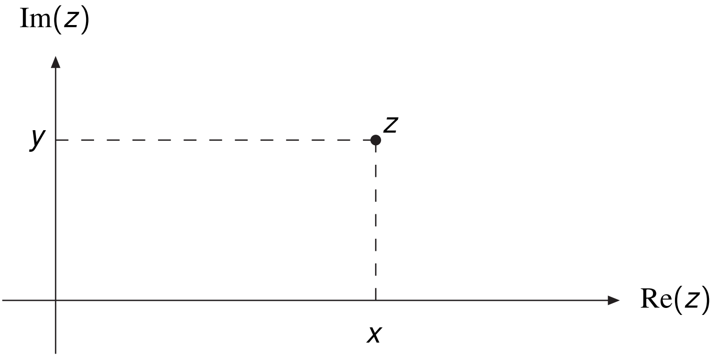
$$|z| \quad = \quad \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Beispiel

$$|3 + 5i| \quad = \quad \sqrt{(3 + 5i)(3 - 5i)} \; = \; \sqrt{9 + 25} \; = \; \sqrt{34}.$$

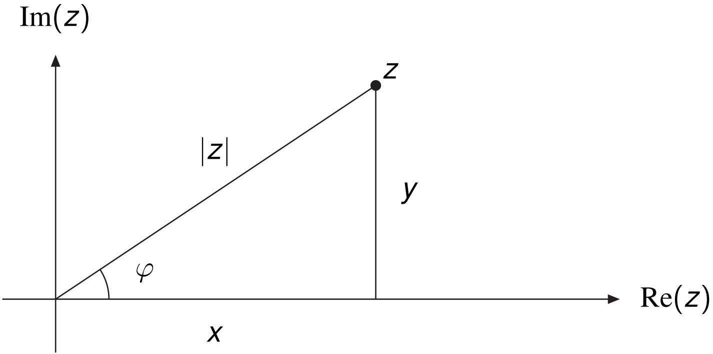
Die komplexe Zahlenebene

Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ wird durch ein Paar (x, y) zweier reeller Zahlen beschrieben.



Die reellen Zahlen sind genau die Zahlen, für die $\mathrm{Im}(z) = 0$ gilt.

Die komplexe Zahlenebene



Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

φ nennt man das Argument oder die Phase der komplexen Zahl.

Umrechnung: Normalform in Polarform

$$
\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\tan\varphi &= \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \\
\varphi &= \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \;\; x = 0, \;\; y > 0, \\
\varphi &= \frac{3\pi}{2} \quad \text{für} \;\; x = 0, \;\; y < 0.
\end{aligned}
$$

Die Auflösung der Gleichung $\tan\varphi = y/x$ nach φ ergibt

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \arctan\frac{y}{x}, && \text{für } x > 0, y \geq 0, \\
\varphi &= \pi + \arctan\frac{y}{x}, && \text{für } x < 0 \\
\varphi &= 2\pi + \arctan\frac{y}{x}, && \text{für } x > 0, y < 0.
\end{aligned}
$$

Umrechnung: Polarform in Normalform

$$x = |z| \cos \varphi, \qquad y = |z| \sin \varphi.$$

Multiplikation und Division in Polarform

In der Normalform hatten wir:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2)\,, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}\,. \end{aligned}$$

In der Polarform sind Multiplikation und Division besonders einfach:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\,|z_2|\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]\,, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]\,. \end{aligned}$$

Die Formel von Moivre

Aus

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \, |z_2| \left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) \right]$$

folgt insbesondere

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi \right).$$

Diese Gleichung wird auch als Formel von Moivre bezeichnet.

Die Formel von Euler

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

Wir werden später komplexwertige Funktionen kennenlernen. Im Vorgriff soll allerdings hier schon die Formel von Euler erwähnt werden

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Diese Formel werden wir später mit Hilfe der Reihendarstellung der Funktionen $\exp$, $\sin$ und $\cos$ relativ einfach beweisen können. Somit

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$$

Multiplikation und Division mit der Formel von Euler

Es sei $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$. Dann ist

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|\,|z_2|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \end{aligned}$$

Quiz

$$i^9 \quad = \quad ?$$

(A) $-i$

(B) i

(C) $9i$

(D) $9 + i$

Antwort

$$
\begin{aligned}
i^9 &= i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \\
&= i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i \\
&= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i \\
&= (-1)^4 \cdot i \\
&= i
\end{aligned}
$$

Betrag und Argument von i

Wir schreiben i in Polarform: Es ist

$$|i| \;=\; \sqrt{i \cdot i^*} \;=\; \sqrt{i \cdot (-i)} \;=\; \sqrt{1} \;=\; 1.$$

Da $i = 0 + 1 \cdot i$ und somit $x = 0$ und $y = 1$ gilt

$$\varphi \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

Somit

$$i \;=\; \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}.$$

Potenzen von i

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Mit Formel von Moivre haben wir

$$i^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Insbesondere:

$$\begin{array}{cccc}
i^{-4} = 1, & i^{-3} = i, & i^{-2} = -1, & i^{-1} = -i, \\
i^{0} = 1, & i^{1} = i, & i^{2} = -1, & i^{3} = -i, \\
i^{4} = 1, & i^{5} = i, & i^{6} = -1, & i^{7} = -i, \\
i^{8} = 1, & i^{9} = i, & i^{10} = -1, & i^{11} = -i,
\end{array}$$

Quiz

$$\sqrt{i} \quad = \quad ?$$

(A) -1
(B) i
(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$
(D) $-1+i$