Vektoren

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Motivation und Definition

Motivation

Aus der Schulmathematik sind die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bekannt. Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ können durch zwei reelle Zahlen x und y beschrieben werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ können durch drei reelle Zahlen x, y und z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Motivation

Wir können das Konzept in zwei Richtungen erweitern:

- Wir lassen andere Dimensionen zu und beschränken uns nicht mehr auf Vektorräume der Dimension 2 und 3.
  Beispiel: $\mathbb{R}^n$
- Wir lassen andere Grundkörper zu, z.B die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.
  Beispiel: $\mathbb{C}^n$

Vektorräume

Sei K ein Körper und $(V, +)$ eine kommutative Gruppe. Weiter sei eine zusätzliche Verknüpfung gegeben, die man skalare Multiplikation nennt:

$$\begin{array}{ccc} K \times V & \rightarrow & V \\ (k, \vec{v}) & \rightarrow & k \cdot \vec{v} \end{array}$$

Definition eines Vektorraumes

V ist ein K-Vektorraum falls gilt:

- *(V1) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper*
- *(V2) $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe*

(Fortsetzung nächste Folie)

Vektorräume

Definition eines Vektorraumes (Fortsetzung)

- *(V3) Es gelten die Distributivgesetze:*

$$\begin{aligned} k \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= (k \cdot \vec{v}_1) + (k \cdot \vec{v}_2) \\ (k_1 + k_2) \cdot \vec{v} &= (k_1 \cdot \vec{v}) + (k_2 \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

- *(V4) Es gilt das Assoziativgesetz:*

$$k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{v}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{v}$$

- *(V5) Für die Eins gilt:*

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Bemerkung: Bei $(k_1 \cdot k_2)$ ist die Multiplikation im Körper gemeint.

Vektorräume

Als Grundkörper treten in den Naturwissenschaften fast immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auf. Beispiele für Vektorräume sind der $\mathbb{R}^n$ (mit Grundkörper $\mathbb{R}$) und der $\mathbb{C}^n$ (mit Grundkörper $\mathbb{C}$).

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \mid z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Dualer Vektorraum

Man schreibt die Elemente aus dem Vektorraum als Spaltenvektoren, so zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Ebenso ist die Schreibweise als Zeilenvektor gebräuchlich:

$$(x, y, z) \in {\mathbb{R}^3}^* .$$

V^* bezeichnet den zu V **dualen Vektorraum** (falls V alle Spaltenvektoren enthält, so enthält V^* die Zeilenvektoren).

Transposition

Man bezeichnet mit $\vec{v}^T$ den zu $\vec{v}$ transponierten Vektor (d.h. aus einem Spaltenvektor wird ein Zeilenvektor, und aus einem Zeilenvektor wird ein Spaltenvektor):

$$(x_1, x_2, ..., x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Addition und skalare Multiplikation

Bei der Summe zweier Vektoren werden die Vektoren komponentenweise addiert:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Bei der skalaren Multiplikation wird jede Komponente mit dem Skalar multipliziert:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Quiz

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$

Quiz

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

$$i \vec{v}_1 - \frac{1}{2} \vec{v}_2 = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2i \\ 2i \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren

Definition

Vektoren, die in fast allen Komponenten eine Null haben, bis auf eine Komponente, in der sie eine Eins haben, spielen eine wichtige Rolle. Hat so ein Vektor in der i-ten Komponente eine Eins,

$$\vec{e}_i \quad = \quad \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{i-1}, 1, 0, ..., 0 \right)^T ,$$

so bezeichnet man diesen Vektor als den ***i*-ten Einheitsvektor**.

Lineare Unabhängigkeit

Definition

Seien n Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$ gegeben. Folgt aus

$$\begin{aligned} a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + ... + a_n \vec{v}_n & = & \vec{0} \\ & \Rightarrow & a_1 = a_2 = ... = a_n = 0, \end{aligned}$$

so nennt man die Vektoren **linear unabhängig**. Anderfalls nennt man sie linear abhängig.

Basis und Dimension

Definition

Sei V ein Vektorraum. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V nennt man die **Dimension des Vektorraumes**.
Eine Menge linearer unabhängiger Vektoren, die maximal ist, nennt man eine **Basis** von V.

Beispiel

$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ haben die Dimension n. Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ ist zum Beispiel

$$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n \right\}.$$

Man nennt diese Basis die Standardbasis.

Standardbasis

Beispiel (Standardbasis des $\mathbb{R}^4$)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quiz

Die Standardbasis des $\mathbb{C}^2$ ist

(A) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(B) $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

(C) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

(D) $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$

Abschnitt 2

Skalarprodukte

Das euklidische Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten zunächst den $\mathbb{R}^n$. Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Die Komponentendarstellung der beiden Vektoren bezüglich der Standardbasis sei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Wir definieren das euklidische Standardskalarprodukt zwischen zwei Vektoren als die Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\to \mathbb{R}, \\ \vec{x} \cdot \vec{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n. \end{aligned}$$

Euklidische Skalarprodukte

Ein euklidische Skalarprodukt eines reellen Vektorraumes ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $V \times V \to \mathbb{R}$:

- *Linear in der ersten Komponente:*

$$(\vec{x}+\vec{y}) \cdot \vec{z} \;=\; \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}, \qquad (\lambda \cdot \vec{x}) \cdot \vec{y} \;=\; \lambda \left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right).$$

- *Linear in der zweiten Komponente:*

$$\vec{x} \cdot (\vec{y}+\vec{z}) \;=\; \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}, \qquad \vec{x} \cdot (\lambda \cdot \vec{y}) \;=\; \lambda \left(\vec{x} \cdot \vec{y}\right).$$

- *Symmetrisch:*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} \;=\; \vec{y} \cdot \vec{x}.$$

- *Positiv definit:*

$$\vec{x} \cdot \vec{x} \;>\; 0, \quad \textit{falls} \quad \vec{x} \neq \vec{0}.$$

Euklidische Skalarprodukte

- Ein reeller Vektorraum mit einem euklidischen Skalarprodukt bezeichnet man als einen euklidischen Vektorraum.
- Die Bezeichnung “euklidisch” bezieht sich insbesondere auf Forderung nach positiver Definitheit.
- In der Physik treten auch Skalarprodukte auf, bei denen die Forderung nach positiv Definitheit aufgegeben wird.
  Ein Beispiel hierfür ist das Skalarprodukt im Minkowskiraum.

Euklidische Skalarprodukte

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \;=\; 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 \;=\; 4 + 10 + 18 \;=\; 32$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad = \quad ?$$

(A) 1

(B) 2

(C) 32

(D) 42

Das unitäre Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

Wir betrachten nun $\mathbb{C}^n$.
Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$.
In diesem Fall definieren wir das unitäre Standardskalarprodukt als

$$\begin{aligned} V \times V & \rightarrow \mathbb{C}, \\ \vec{x} \cdot \vec{y} & = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + ... + x_n^* y_n. \end{aligned}$$

Unitäre Skalarprodukte

Ein unitäres Skalarprodukt eines komplexen Vektorraumes ist eine positiv definite Hermitische Form $V \times V \to \mathbb{C}$:

- *Semilinear in der ersten Komponente:*

$$\left(\vec{x}+\vec{y}\right)\cdot\vec{z} \;=\; \vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{z}, \qquad \left(\lambda\cdot\vec{x}\right)\cdot\vec{y} \;=\; \lambda^{*}\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right).$$

- *Linear in der zweiten Komponente:*

$$\vec{x}\cdot\left(\vec{y}+\vec{z}\right) \;=\; \vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}, \qquad \vec{x}\cdot\left(\lambda\cdot\vec{y}\right) \;=\; \lambda\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right).$$

- *Hermitisch:*

$$\vec{x}\cdot\vec{y} \;=\; \left(\vec{y}\cdot\vec{x}\right)^{*}.$$

- *Positiv definit:*

$$\vec{x}\cdot\vec{x} \;>\; 0, \quad \textit{falls} \quad \vec{x}\neq\vec{0}.$$

Unitäre Skalarprodukte

Beispiel

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} &= i^* \cdot (4i) + (2)^* \cdot 5 + (3i)^* \cdot 6 \\
&= (-i) \cdot (4i) + 2 \cdot 5 + (-3i) \cdot 6 \\
&= 4 + 10 - 18i \\
&= 14 - 18i.
\end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} = ?$$

(A) $1+3i$

(B) 2

(C) 3

(D) $-1+2i$

Betrag eines Vektors

Definition

Man bezeichnet mit

$$\left|\vec{x}\right| = \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$$

die Länge oder den **Betrag von** $\vec{x}$.

Winkel zweier Vektoren und Orthogonalität

Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist gegeben durch

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left|\vec{x}\right| \left|\vec{y}\right| \cos\varphi,$$

also

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\left|\vec{x}\right| \left|\vec{y}\right|}.$$

Zwei Vektoren stehen **senkrecht** aufeinander ($\varphi = 90^\circ$), falls

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0.$$

Abschnitt 3

Das Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt

Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{C}^3$.
In einem dreidimensionalen Vektorraum ist zusätzlich das Kreuzprodukt als eine Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow V, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

definiert.

Wichtig: Das Kreuzprodukt gibt es nur in drei Dimensionen!

Das Kreuzprodukt

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Kreuzproduktes

Das Kreuzprodukt ist anti-symmetrisch:

$$\vec{x} \times \vec{y} \;=\; -\vec{y} \times \vec{x}.$$

Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \left(\vec{x} \times \vec{y}\right) &= 0, \\ \vec{y} \cdot \left(\vec{x} \times \vec{y}\right) &= 0, \end{aligned}$$

Für den Betrag von $\vec{x} \times \vec{y}$ gilt:

$$\left|\vec{x} \times \vec{y}\right| \;=\; \left|\vec{x}\right| \left|\vec{y}\right| \sin\varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist.

Antisymmetrischer Tensor

Sei $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$. Für die Komponenten von $\vec{z}$ gilt:

$$z_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} x_j y_k$$

Hier wurde der **antisymmetrische Tensor** (oder **Levi-Civita-Tensor**) ε_{ijk} verwendet.

Definition (antisymmetrischer Tensor)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3), \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Permutationen

Definition

Eine Permutation $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ nennt man gerade, wenn man sie durch eine gerade Anzahl von paarweisen Vertauschungen aus $(1, 2, ..., n)$ erzeugen kann. Benötigt man eine ungerade Anzahl von Vertauschungen, so nennt man die Permutation ungerade.

Beispiel

$$\begin{array}{ll} (3,2,1,5,4) & \text{ist eine gerade Permutation} \\ & (\text{vertausche } 1 \leftrightarrow 3 \text{ und } 4 \leftrightarrow 5), \\ (1,5,3,4,2) & \text{ist eine ungerade Permutation} \\ & (\text{vertausche } 2 \leftrightarrow 5). \end{array}$$

Kronecker-Delta-Symbol

Definition (Kronecker-Delta-Symbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Quiz

$$\varepsilon_{132} \quad = \quad ?$$

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 6

Bemerkungen

Unitäres Skalarprodukt: Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$*. Im Allgemeinen*

$$\vec{y} \cdot \vec{x} \quad \neq \quad \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Es ist

$$\vec{y} \cdot \vec{x} \quad = \quad \left(\vec{x} \cdot \vec{y} \right)^* .$$

Kreuzprodukt: Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$*. Im Allgemeinen*

$$\vec{y} \times \vec{x} \quad \neq \quad \vec{x} \times \vec{y}.$$

Es ist

$$\vec{y} \times \vec{x} \quad = \quad -\vec{x} \times \vec{y}.$$