Lineare Gleichungssysteme

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Definition und Problemstellung

Motivation

- Lineare Gleichungssysteme treten in den Naturwissenschaften relativ oft auf, viele Problemstellungen lassen sich auf lineare Gleichungssysteme zurückführen.
- Lineare Gleichungssysteme sind systematisch lösbar.
- Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus ist eine systematische Lösungsmethode.

Lineare Gleichungssysteme

Definition

Unter einem linearen Gleichungssystem versteht man ***n* Gleichungen** mit ***m* Unbekannten** x_1, x_2, ..., x_m der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\ &... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_{ij} und b_i sind gegebene reelle oder komplexe Zahlen.

Jede Variable kommt nur linear vor und jeder Summand auf der linken Seite enthält nur eine Variable.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 36, \\
2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 29, \\
x_2 + 4x_3 &= 14.
\end{aligned}
$$

Gegenbeispiel

$$
\begin{aligned}
3x_1^5 + 3x_2 + 9x_3 &= 36, \\
x_1 + x_1 x_2 + 4x_3 &= 14, \\
\sin(x_1) + 7x_3 &= 29.
\end{aligned}
$$

- $3x_1^5$ ist nicht linear: höhere Potenz in x_1
- $x_1 x_2$ ist nicht linear: enthält mehr als eine Variable.
- $\sin(x_1)$ ist keine lineare Funktion von x_1.

Abschnitt 2

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Zeilenvertauschungen

Wir betrachten nun einen Algorithmus um ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten systematisch zu vereinfachen und zu lösen.

Wir beginnen mit einer trivialen Beobachtung: Offensichtlich können Zeilen vertauscht werden, d.h. das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \end{aligned}$$

ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1. \end{aligned}$$

Multiplikation mit Konstanten

Desweiteren sei $(x_1, x_2, ..., x_m)$ ein m-Tupel, welches die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + ... + a_m x_m \quad = \quad b,$$

erfüllt. Dann erfüllt es auch die Gleichung

$$(ca_1)x_1 + (ca_2)x_2 + (ca_3)x_3 + ... + (ca_m)x_m \quad = \quad cb,$$

Umgekehrt gilt, daß für $c \neq 0$ jedes m-Tupel, welches die zweite Gleichung erfüllt, auch die erste Gleichung erfüllt.

Daraus folgt, daß man die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einer konstanten Zahl c ungleich Null multiplizieren darf.

Addition von Zeilen

Die dritte elementare Umformung ist die folgende: Man darf eine Zeile durch die Summe dieser Zeile mit einer anderen Zeile ersetzen, d.h. die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{21})\,x_1 + (a_{12} + a_{22})\,x_2 + ... + (a_{1m} + a_{2m})\,x_m &= b_1 + b_2, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \end{aligned}$$

haben die gleichen Lösungen.

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Mit Hilfe dieser drei elementaren Umformungen

1. Zeilenvertauschungen
2. Multiplikation mit Konstanten
3. Addition von Zeilen

läßt sich ein Algorithmus zur systematischen Vereinfachung von linearen Gleichungssystemen angeben.

Strategie

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3m}x_m &= b_3, \\
... & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{array}{rcl}
1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m & = & b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m & = & b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3m}x_m & = & b_3, \\
... & & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m & = & b_n.
\end{array}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3m}x_m &= b_3, \\
&\;... \\
0 \cdot x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3m}x_m &= b_3, \\
&\dots \\
0 \cdot x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3m}x_m &= b_3, \\
&... \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n.
\end{aligned}$$

Strategie

$$\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{13} x_3 + ... + a_{1m} x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + a_{23} x_3 + ... + a_{2m} x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + ... + a_{3m} x_m &= b_3, \\
&\ldots \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{n3} x_3 + ... + a_{nm} x_m &= b_n.
\end{aligned}$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + ... + a_{1m} x_m &= b_1, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + ... + a_{2m} x_m &= b_2, \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + ... + a_{3m} x_m &= b_3, \\
&... \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + ... + a_{nm} x_m &= b_n.
\end{aligned}
$$

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Algorithmus

1. *Setze* $i = 1$ *(Zeilenindex),* $j = 1$ *(Spaltenindex).*
2. *Falls* $a_{ij} = 0$ *suche* $k > i$*, so daß* $a_{kj} \neq 0$ *und* **vertausche** *Zeilen* i *und* k.
3. *Falls ein solches* k *aus Schritt 2 nicht gefunden werden kann, setze* $j \to j + 1$.
4. *Falls man in Schritt 3 den Wert* $j = m + 1$ *erreicht, beende den Algorithmus, andernfalls gehe zurück zu Schritt 2.*
5. **Multipliziere** *Zeile* i *mit* $1/a_{ij}$.
6. *Für alle Zeilen* $k \neq i$ **addiere** *zur Zeile* k *das* $(-a_{kj})$*-fache der* i*-ten Zeile.*
7. *Setze* $i \to i + 1$ *und* $j \to j + 1$.
8. *Falls man in Schritt 7 den Wert* $i = n + 1$ *oder den Wert* $j = m + 1$ *erreicht, beende den Algorithmus, andernfalls gehe zurück zu Schritt 2.*

Notation

In der Praxis schreibt man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m & = & b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m & = & b_2, \\
... & & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m & = & b_n.
\end{array}$$

wie folgt auf:

$$\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1m} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2m} & b_2 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & a_{nm} & b_1
\end{array}$$

Dies ist ausreichend, da alle Umformungen nur auf die Koeffizienten a_{ij} und b_i wirken.

Beispiel

Wir betrachten das obige Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 36, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 29, \\ x_2 + 4x_3 &= 14. \end{aligned}$$

Aufgeschrieben ergibt dies:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 36 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

Umformungen

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 36 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \text{Multipliziere mit } \frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 1. Zeile} \\ \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \\ \\ \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right.$$

Umformungen (Fortsetzung)

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 0 & 2 & 7 & \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \\ 0 & 0 & 3 & 9 & \text{Multipliziere mit } \frac{1}{3} \\ & & & & \\ 1 & 0 & 2 & 7 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 3. Zeile} \\ 0 & 1 & 1 & 5 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 3. Zeile} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \\ & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \end{array}$$

Ergebnis

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus endete mit

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist somit äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= 2, \\ x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Der Rang eines linearen Gleichungssystems

Durch Umbenennung der Variablen $x_1, ..., x_m$ (dies ist gleichbedeutend mit Spaltenvertauschungen) lässt sich durch den Gauß'schen Eliminationsalgorithmus die folgende Form erreichen:

$$\left.\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & ... & 0 & a_{1(r+1)} & ... & a_{1m} & b_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_{2(r+1)} & ... & a_{2m} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_{r(r+1)} & ... & a_{rm} & b_r \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & b_{r+1} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & b_n \end{array}\right.$$

Man bezeichnet r als den Rang (engl. "rank").

Lösungen eines linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung, eine eindeutige Lösung oder mehrere Lösungen falls:

- Ist eine der Zahlen b_{r+1}, ..., b_n ungleich Null, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.
- Ist $r = m$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung.
- Ist $r < m$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so gibt es mehrere Lösungen.

1. Fall: Keine Lösung

- Ist eine der Zahlen b_{r+1}, ..., b_n ungleich Null, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.
- In diesem Fall ist notwendigerweise $r < n$.

$$\left.\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(r+1)} & \dots & a_{1m} & b_1 \\
0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(r+1)} & \dots & a_{2m} & b_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & a_{r(r+1)} & \dots & a_{rm} & b_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{r+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n
\end{array}\right.$$

2. Fall: Eindeutige Lösung

- Ist $r = m$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung.
- Dies beinhaltet auch den Spezialfall $r = n$. Für $r = n$ ist $\{b_{r+1}, ..., b_n\} = \emptyset$ und der zweite Fall reduziert sich auf $r = n = m$.

$$
\left.\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & ... & 0 & b_1 \\
0 & 1 & ... & 0 & b_2 \\
... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 1 & b_r \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

3. Fall: Mehrere Lösungen

- Ist $r < m$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so gibt es mehrere Lösungen.
- Dies beinhaltet auch den Spezialfall $r = n$. Für $r = n$ ist $\{b_{r+1}, ..., b_n\} = \emptyset$ und der dritte Fall reduziert sich auf auf $r = n$ und $r < m$.

$$
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & ... & 0 & a_{1(r+1)} & ... & a_{1m} & b_1 \\
0 & 1 & ... & 0 & a_{2(r+1)} & ... & a_{2m} & b_2 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 1 & a_{r(r+1)} & ... & a_{rm} & b_r \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Lösungen eines linearen Gleichungssystems

- Ist $r < n$ und $b_{r+1} = ... = b_n = 0$, so reduzieren sich die Zeilen $(r+1)$ bis n

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{array}$$

auf die triviale Gleichung

$$0 = 0.$$

Diese Zeilen enthalten keine zusätzliche Information und können auch weggelassen werden.

Quiz

Für ein lineares Gleichungssystem mit vier Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 liefert der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(A) Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

(B) Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$.

(C) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die auf einer Geraden im $\mathbb{R}^4$ liegen: $x_1 = 1 - t$, $x_2 = 2 - t$, $x_3 = 3$, $x_4 = t$.

(D) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die auf einer Ebene im $\mathbb{R}^4$ liegen: $x_1 = 1 - t_2$, $x_2 = 2 - t_2$, $x_3 = 3 + t_1$, $x_4 = t_2$.

Abschnitt 3

Anwendungen

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Zur Erinnerung: m Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_m$ nennt man linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + ... + \lambda_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

nur die Lösung $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = (0, 0, ..., 0)$ hat.
Andernfalls nennt man sie linear abhängig.
Ist der zugrundeliegende Vektorraum n-dimensional, so ergibt die obige Gleichung ausgeschrieben in Komponenten n lineare Gleichungen mit m Unbekannten λ_1,..., λ_m.
Man kann nun mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsalgorithmuses feststellen, ob die Vektoren linear abhängig sind.

Beispiel

Sei

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Dies führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir formen dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsalgorithmuses um:

$$\begin{array}{rrr|rl}
1 & 2 & -1 & 0 & \\
1 & 3 & -4 & 0 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 1. Zeile} \\
1 & 4 & -7 & 0 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 1. Zeile} \\
 & & & & \\
1 & 2 & -1 & 0 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 2. Zeile} \\
0 & 1 & -3 & 0 & \\
0 & 2 & -6 & 0 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 2. Zeile} \\
 & & & & \\
1 & 0 & 5 & 0 & \\
0 & 1 & -3 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}$$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Somit gibt es mehrere Lösungen:

$$\lambda_1 = -5t, \quad \lambda_2 = 3t, \quad \lambda_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die drei Vektoren sind linear abhängig.