Matrizen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Definition

Matrizen

Definition

Eine rechteckige Anordnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

von Elementen a_{ij} aus einem Körper nennt man Matrix.
Die Elemente a_{ij} nennt man die Komponenten der Matrix.
Eine Matrix mit n Zeilen und m Spalten bezeichnet man als $n \times m$-Matrix.

Matrizen

- Eine Matrix bezeichnet man als quadratisch, falls $n = m$.
- Eine Matrix bezeichnet man als Einheitsmatrix, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = \delta_{ij}$.
- Eine Matrix bezeichnet man als Diagonalmatrix, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.
- Eine Matrix bezeichnet man als obere Dreiecksmatrix, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

Quadratisch:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Addition von Matrizen

Seien A und B zwei $n \times m$-Matrizen.

Die Addition zweier Matrizen mit gleicher Spalten- und Zeilenanzahl ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2m}+b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Addition von Matrizen

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalaren

Eine Multiplikation mit Skalaren ist definiert durch

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalaren

Beispiel

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Der Vektorraum der $n \times m$-Matrizen

- Mit dieser Addition und dieser skalaren Multiplikation bilden die $n \times m$-Matrizen einen Vektorraum.
- Die Dimension dieses Vektorraumes ist $n \cdot m$.
- Eine Basis ist gegegeben durch die Matrizen e_{ij},

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & ... & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix},$$

die nur in dem Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte eine Eins haben, ansonsten nur Nullen.

Multiplikation

Die Multiplikation einer $n \times k$-Matrix A mit einer $k \times m$-Matrix B ist wie folgt definiert:

Das Ergebnis ist eine $n \times m$-Matrix C

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{k1} & b_{k2} & ... & b_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nm} \end{pmatrix},$$

wobei

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + ... + a_{ik} b_{kj}.$$

Regel: Zeile $\times$ Spalte

Multiplikation

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 + 18 + 33 & 8 + 20 + 36 \\ 28 + 45 + 66 & 32 + 50 + 72 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{pmatrix}$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad = \quad ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \quad = \quad ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$

Spaltenvektoren und Zeilenvektoren als Matrizen

- Ein n-dimensionaler Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

kann als eine $n \times 1$-Matrix aufgefasst werden.

- Ebenso kann ein n-dimensionaler Zeilenvektor

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$$

als eine $1 \times n$-Matrix betrachtet werden.

Lineare Gleichungssysteme

Setzt man

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

so läßt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nm}x_m &= b_n. \end{aligned}$$

auch wie folgt schreiben:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Abschnitt 2

Spuren und Determinanten

Quadratische Matrizen

Wir betrachten im folgenden die quadratischen $n \times n$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und führen die Begriffe **Spur** und **Determinante** ein.

Spur

Sei A eine $n \times n$-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Spur (engl. “trace”) einer quadratischen Matrix ist die Summe der Diagonalelemente:

$$Tr\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Rechenregeln für die Spur

Es seien A und B $n \times n$-Matrizen, λ ein Skalar:

$$\begin{aligned} \text{Tr } (A+B) &= \text{Tr } A + \text{Tr } B, \\ \text{Tr } (\lambda \cdot A) &= \lambda \, \text{Tr } A. \end{aligned}$$

Spur

Beispiel

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 1+6+11+16 = 34$$

Quiz

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad ?$$

(A) $\sqrt{3}$

(B) 3

(C) 6

(D) 45

Determinante

Die Determinante einer quadratischen $n \times n$-Matrix ist definiert durch

$$\det A = \sum\limits_{i_1=1}^{n} \sum\limits_{i_2=1}^{n} ... \sum\limits_{i_n=1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 ... i_n} a_{1 i_1} a_{2 i_2} ... a_{n i_n},$$

wobei $\varepsilon_{i_1 i_2 ... i_n}$ das total antisymmetrische Symbol in n Dimensionen ist

$$\varepsilon_{i_1 i_2 ... i_n} = \begin{cases} +1 & \textit{für } (i_1 i_2 ... i_n) \textit{ eine gerade Permutation von } (1, 2, ..., n), \\ -1 & \textit{für } (i_1 i_2 ... i_n) \textit{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, ..., n), \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Determinante

Für die Determinante existiert auch die folgende Schreibweise

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinante einer Diagonalmatrix

Sei $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix.

Dann ist

$$\det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot ... \cdot \lambda_n.$$

Eine 1×1-Matrix ist immer eine Diagonalmatrix und somit

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Berechnung der Determinante

Zu einer $n \times n$-Matrix A definieren wir zunächst eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix A_{ij}, die dadurch ensteht, daß man die i-te Zeile und die j-te Spalte der Matrix A entfernt.

Laplace'sche Entwicklungssatz:

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Äquivalent kann auch nach der j-ten Spalte entwickelt werden:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Dies erlaubt die rekursive Berechnung einer Determinante.

Rechenregeln für die Determinante:

Es seien A und B $n \times n$-Matrizen, λ ein Skalar:

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= (\det A) \cdot (\det B), \\ \det(\lambda \cdot A) &= \lambda^n \cdot \det A. \end{aligned}$$

Determinante

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (5 \cdot 11 - 7 \cdot 9) = 24$$

Quiz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad = \quad ?$$

(A) 0

(B) 10

(C) 24

(D) -228

Quadratische Matrizen

Seien A und B zwei $n \times n$-Matrizen. In diesem Fall ist das Matrixprodukt

$$A \cdot B$$

wieder eine $n \times n$-Matrix.
Für $n \times n$-Matrizen ist die Matrizenmultiplikation also abgeschlossen.

Das neutrale Element bezüglich der Matrizenmultiplikation ist offensichtlich die Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ ... & & ... & & ... \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Die inverse Matrix

Unter welchen Bedingungen existiert auch ein inverses Element? Falls so ein Element existiert bezeichnen wir es mit A^{-1}. Es soll also gelten

$$A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}.$$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Determinante, so erhalten wir

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det \mathbf{1} = 1,$$

also falls $\det A \neq 0$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

$\det A \neq 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Inversen.

Die inverse Matrix

Es läßt sich zeigen, daß $\det A \neq 0$ auch eine hinreichende Bedingung ist.

Satz

A^{-1} existiert genau dann, wenn $\det A \neq 0$.

Die Gruppe der invertierbaren Matrizen

Wir betrachten nun die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen mit der Eigenschaft $\det A \neq 0$.
Wegen $\det(AB) = \det A \det B$ ist diese Menge abgeschlossen bezüglich der Matrizenmultiplikation.
Wie gerade diskutiert wurde, existiert in dieser Menge zu jeder Matrix auch ein Inverses.
Diese Menge bildet daher bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die man als

$$GL(n, \mathbb{R}), \quad \text{bzw.} \quad GL(n, \mathbb{C})$$

bezeichnet.

Abschnitt 3

Berechnung der inversen Matrix

Die inverse Matrix

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit $\det A \neq 0$. Gesucht ist eine $n \times n$-Matrix X

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

so daß gilt:

$$A \cdot X = \mathbf{1}$$

Die inverse Matrix

Wir multiplizieren die linke Seite aus und betrachten danach die j-te Spalte auf beiden Seiten:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + ... + a_{1n}x_{nj} &= 0, \\
... &= 0 \\
a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + ... + a_{jn}x_{nj} &= 1, \\
... &= 0 \\
a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + ... + a_{nn}x_{nj} &= 0.
\end{aligned}$$

Diese n Gleichungen bilden eine lineares Gleichungssystem für die Unbekannten x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{nj}, welches mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus gelöst werden kann.

Die inverse Matrix

Da dies für jede Spalte j gilt, kann man so alle n^2 Unbekannten x_{ij} bestimmen.
Da die Koeffizienten der linken Seite des linearen Gleichungssystems immer gleich sind, verfährt man in der Praxis wie folgt:
Man schreibt die Gleichungen wie folgt an

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

und bringt dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus auf die Form

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{array}$$

Die inverse Matrix

Die inverse Matrix A^{-1} ist dann gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir beginnen mit

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Berechnung der inversen Matrix

$$
\begin{array}{ccc|ccc l}
1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \\
2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 1. Zeile} \\
0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & \\
 & & & & & & \\
1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & \\
0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 2. Zeile} \\
 & & & & & & \\
1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 1 & \text{Multipliziere mit } \frac{1}{3} \\
 & & & & & & \\
1 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 & \text{Addiere das } (-2)\text{-fache der 3. Zeile} \\
0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & \text{Addiere das } (-1)\text{-fache der 3. Zeile} \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\
 & & & & & & \\
1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \\
0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} &
\end{array}
$$

Berechnung der inversen Matrix

$$
\left.\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\
0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\
0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}
\end{array}\right.
$$

Somit ist A^{-1} gegeben durch

$$
A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$