Folgen und Reihen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Folgen

Folgen

Definition

Unter einer Folge (a_n) reeller Zahlen versteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Beispiel

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$

definiert eine Folge.

Explizit: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = \frac{1}{16}$, $a_5 = \frac{1}{25}$, ...

Konvergente Folgen

Definition

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent** gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, so daß

$$|a_n - a| \quad < \quad \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{n \to \infty} a_n \quad = \quad a.$$

In anderen Worten liegen für eine konvergente Folge ab einem bestimmten N alle Folgenglieder im Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$.

Divergente Folgen

Definition

Eine Folge nennt man **divergent**, wenn sie gegen keine reelle Zahl konvergiert.

Beispiel

Beispiele für divergente Folgen sind

$$\begin{aligned} a_n &= n, \\ b_n &= \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Beschränkte Folgen

Definition

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $a_n \leq c$ (bzw. $a_n \geq c$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

- Jede konvergente Folge beschränkt.
- Die Umkehrung gilt nicht, eine beschränkte Folge ist nicht notwendiger Weise konvergent, siehe obiges Beispiel mit der Folge (b_n).

Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit den Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, (λa_n), $(a_n b_n)$ konvergent ($\lambda \in \mathbb{R}$) und es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) &= a + b, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) &= a - b, \\
\lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) &= \lambda a, \\
\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) &= a \cdot b.
\end{aligned}$$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Ist weiter $b \neq 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und wir können die Folge

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq N}$$

betrachten. Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b}.$$

Rechenregeln für konvergente Folgen

Satz

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle n. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Bemerkung: Aus $a_n < b_n$ folgt nicht

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n,$$

wie das Beispiel $a_n = 0$ und $b_n = 1/n$ zeigt.

Cauchy-Folgen

Wir hatten bereits bei der axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen den Begriff einer Cauchy-Folge eingeführt, den wir uns nochmal in Erinnerung rufen:

Definition

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen nennt man **Cauchy-Folge**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß

$$|a_n - a_m| \quad < \quad \varepsilon, \qquad \forall n, m \geq N.$$

Satz

Ist eine Folge (a_n) reeller Zahlen konvergent, so ist sie auch eine Cauchy-Folge.

Vollständigkeitsaxiom

Die Umkehrung dieses Satzes postuliert nennt man als Axiom:

Vollständigkeitsaxiom:

In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Wir hatten dies bei der axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen bereits erwähnt.
Somit gilt in $\mathbb{R}$, daß eine Folge (a_n) reeller Zahlen genau dann konvergent ist, falls sie eine Cauchy-Folge ist.

Der Vorteil der Definition einer Cauchy-Folge gegenüber der Definition des Begriffes Konvergenz besteht darin, daß sich erstere nur auf einzelne Folgenglieder bezieht und keinen Bezug auf einen (eventuellen) Grenzwert nimmt.

Quiz

Die Folge

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ist

(A) divergent

(B) konvergent mit Grenzwert 0

(C) konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(D) konvergent mit Grenzwert 1

Abschnitt 2

Reihen

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Man betrachtet nun die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Als unendliche Reihe bezeichnet man nun die Folge dieser Partialsummen. Man schreibt

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Eine unendliche Reihe heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.

Absolute Konvergenz

Definition

Eine unendliche Reihe heißt **absolut konvergent**, falls die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$$

konvergent ist.

Satz

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.

Konvergenzkriterien

Satz

Eine notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, daß

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad = \quad 0.$$

Konvergenzkriterium von Cauchy:

Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *konvergiert genau dann, wenn zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N \in \mathbb{N}$ *existiert, so daß*

$$\left| \sum_{j=m}^{n} a_j \right| \quad < \quad \varepsilon, \quad \forall n \geq m \geq N.$$

Konvergenzkriterien

Satz

Eine Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *mit* $a_j \geq 0$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen:

Sei (a_n) *eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j.$$

Majorantenkriterium:

Sei $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$ *eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativen Gliedern und* (a_n) *eine Folge mit* $|a_n| \leq c_n$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

absolut. Man nennt $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$ *eine Majorante von* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$.

Konvergenzkriterien

Quotientenkriterium:

Sei $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ *eine Reihe mit* $a_n \neq 0$ *für alle* n *und* x *eine reelle Zahl* $0 < x < 1$, *so daß*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \;\; \leq \;\; x, \quad \forall n \geq N.$$

Dann konvergiert die Reihe absolut.

Beispiel

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Es ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{n+1} < 1 \qquad \text{für } n > |x|$$

Die Reihe ist nach dem Quotientenkriterium konvergent.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x) - 1, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x).$$

Beispiel

Es sei $|x| < 1$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$$

Es ist

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \leq |x| < 1$$

Die Reihe ist nach dem Quotientenkriterium konvergent.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = -\ln(1-x).$$

Beispiel

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$$

Die Reihe ist alternierend und $a_n = 1/n$ ist eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen.
Die Reihe ist nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen konvergent.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} = -\ln(2).$$

Beispiel

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

Diese Reihe wird als harmonische Reihe bezeichnet. Diese Reihe ist divergent. Für die Partialsummen gilt

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$ und $\sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j$ zwei absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$c_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j b_{n-j}.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right).$$

Bemerkung: Die absolute Konvergenz ist wesentlich für die Gültigkeit des Satzes! Im Allgemeinen gilt, daß Umordnungen innerhalb einer Reihe nur erlaubt sind, falls die Reihe absolut konvergiert.

Abschnitt 3

Beispiele und Anwendungen

Wichtige Reihen

$$
\begin{aligned}
\exp x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}, \\
-\ln(1-x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}, && |x| < 1, \\
\sin x &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \\
\cos x &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}, \\
\sinh x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \\
\cosh x &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!}.
\end{aligned}
$$

Sinus und Kosinus

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\
&= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
&= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \\
\cos x &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \\
&= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots
\end{aligned}$$

Bemerkungen

- $\sinh$ und $\cosh$ bezeichnet man als Sinus Hyperbolicus bzw. Kosinus Hyperbolicus.
- Mit Ausnahme der Reihe für $\ln(1-x)$ konvergieren alle Reihen absolut für alle Werte von x. Man sagt die Reihen haben einen unendlichen **Konvergenzradius**.
- Die Reihe für $\ln(1-x)$ konvergiert absolut für $|x| < 1$. Somit hat diese Reihe den Konvergenzradius 1.
- Man spricht von einem Konvergenzradius, da die obigen Reihen auch definiert sind, wenn man die reelle Variable x durch eine komplexe Variable z ersetzt.

Quiz

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} \quad = \quad ?$$

(A) $\frac{1}{2}\cos(x)$

(B) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

(C) $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$

(D) $\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)$

Die Formel von Euler

Wir betrachten $\exp(ix)$:

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} i^{2j} \frac{x^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} i^{2j+1} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \cos x + i \sin x.
\end{aligned}$$

Die Reihendarstellung liefert also einen einfachen Beweis der Formel:

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Ebenso findet man

$$\exp x = \cosh x + \sinh x.$$

Man beachte, daß für die Umordnung der Reihen die absolute Konvergenz notwendig ist.

Trigometrische und hyperbolische Funktionen

Man kann die trigometrischen und die hyperbolischen Funktionen auch durch die Exponentialfunktion ausdrücken:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),$$
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right), \qquad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right).$$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned}$$

Leichter zu merken:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

Additionstheoreme

Es ist

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta) \\ e^{i\alpha} &= \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \\ e^{i\beta} &= \cos(\beta) + i \sin(\beta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} e^{i\beta} &= [\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)] [\cos(\beta) + i \sin(\beta)] \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + i \cos(\alpha)\sin(\beta) + i \sin(\alpha)\cos(\beta) + i^2 \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ &= [\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)] + i [\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)] \end{aligned}$$

Additionstheoreme

Somit folgt aus $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$

$$\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta) = \left[\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\right] + i\left[\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\right]$$

Nimmt man nun den Real- bzw. Imaginärteil dieser Gleichung, so erhält man die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus.