Funktionen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Grundlagen

Funktionen

Definition

Seien D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$. Unter einer reellwertigen Funktion auf D versteht man eine Abbildung

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \to W, \\ & x \to y = f(x). \end{aligned}$$

Man nennt D den Definitionsbereich und W den Wertebereich der Funktion.
Eine Funktion f ordnet jedem $x \in D$ ein $y \in W$ zu.

Umkehrfunktion

Definition

Gibt es zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ mit $y = f(x)$, so ist die Funktion f umkehrbar. In diesem Fall bezeichnet man mit f^{-1} die Umkehrfunktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad : \quad & W \to D, \\ & y \to x = f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Umkehrfunktion

Beispiel

Es sei $D = \mathbb{R}_0^+$ und $W = \mathbb{R}_0^+$ sowie

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & D \rightarrow W, \\ & x \rightarrow x^2. \end{aligned}$$

Dann lautet die Umkehrfunktion

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad : \quad & W \rightarrow D, \\ & y \rightarrow \sqrt{y}. \end{aligned}$$

Abschnitt 2

Stetigkeit

Definition

Man sagt eine Funktion hat im Punkte a den Grenzwert c, falls es mindestens eine Folge $(x_n) \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gibt. Gilt dann für jede Folge $(x_n) \in D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, daß

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c,$$

so bezeichnet man c als den Grenzwert der Funktion $f(x)$ im Punkte a.

In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x\to a} f(x) = c.$$

Grenzwerte von Funktionen

Satz

Die obige Bedingung ist äquivalent zu der Forderung, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x) - c| \quad < \quad \varepsilon, \quad \forall\, |x - a| < \delta \quad \textit{und} \quad x \in D.$$

Bemerkung: Es wird nicht vorausgesetzt, daß $a \in D$ liegt. Die Definition macht auch Sinn, falls D ein offenes Intervall ist und der Grenzwert an den Intervallgrenzen betrachtet wird.

Stetigkeit

Definition

Sei nun $a \in D$. Man bezeichnet eine Funktion als **stetig** im Punkte a, falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

gilt.

Definition

Man bezeichnet eine Funktion als in einem Intervall stetig, falls sie in jedem Punkt des Intervalls stetig ist.

Die Heaviside-Funktion

Beispiel

Wir betrachten die Heaviside-Funktion, definiert durch

$$\Theta(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Für diese Funktion gilt $\Theta(0) = 0$, aber

$$\lim_{x \to 0+} \Theta(x) \quad = \quad 1.$$

Die Heaviside-Funktion ist im Punkte 0 nicht stetig.

Stetige Funktionen

Beispiel

Beispiele von Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, sind Polynomfunktionen, $\exp x$, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$.

Sätze über stetige Funktionen

Satz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in a stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$\begin{aligned} f + g &: D \to \mathbb{R}, \\ \lambda \cdot f &: D \to \mathbb{R}, \\ f \cdot g &: D \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

im Punkte a stetig. Ist ferner $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} \;:\; D' \to \mathbb{R}$$

in a stetig, wobei $D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in D gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad \forall \ |x - y| < \delta.$$

- Jede Funktion, die auf D gleichmässig stetig ist, ist auch in jedem Punkte aus D stetig im herkömmlichen Sinne. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.
- Ist eine Funktion in jedem Punkte $x \in D$ stetig im herkömmlichen Sinne, so genügt es für ein vorgegebenes ε für jeden Punkt ein δ_x zu finden. Dieses δ_x darf mit x variieren. Für die gleichmäßige Stetigkeit wird dagegen gefordert, daß δ von x unabhängig ist.

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Quiz

Die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-x} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + e^{x} & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Abschnitt 3

Rationale Funktionen

Rationale Funktionen

Definition

Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen. Unter einer rationalen Funktion versteht man eine Funktion

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion ist gegeben durch $D = \{x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0\}$.

Eine rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig.

Partialbruchzerlegung

Rationale Funktionen können in **Partialbrüche** zerlegt werden. Ist

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + ... + p_1 x + p_0,$$
$$q(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + ... + q_1 x + q_0,$$

und ist ausserdem die Faktorisierung des Nennerpolynoms bekannt

$$q(x) = c \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{\lambda_j},$$

wobei λ_j die Multiziplität der Nullstelle x_j angibt, so läßt sich die rationale Funktion schreiben als

$$R(x) \;=\; \frac{p(x)}{q(x)} \;=\; P(x) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k},$$

wobei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $\deg p(x) - \deg q(x)$ ist und $a_{jk} \in \mathbb{R}$.

Partialbruchzerlegung

Berechnung von $P(x)$ und der Konstanten a_{jk}:

$P(x)$ bestimmt sich durch Polynomdivision mit Rest.

Wir betrachten als Beispiel die rationale Funktion

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)}$$

Für das Nennerpolynom haben wir

$$(x-2)^2(x+2) \quad = \quad x^3 - 2x^2 - 4x + 8.$$

Polynomdivision

Polynomdivision mit Rest liefert

$$
\begin{array}{rcccl}
(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18) & : & (x^3 - 2x^2 - 4x + 8) & = & x + 5 + \frac{(2x^2+9x-22)}{(x^3-2x^2-4x+8)} \\
-(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x) & & & & \\
-------------- & & & & \\
5x^3 - 8x^2 - 11x + 18 & & & & \\
-(5x^3 - 10x^2 - 20x + 40) & & & & \\
------------ & & & & \\
2x^2 + 9x - 22 & & & &
\end{array}
$$

Somit ist also $P(x) = x + 5$.

Für den Rest verwendet man den Ansatz

$$\frac{2x^2+9x-22}{x^3-2x^2-4x+8} = \frac{a_{12}}{(x-2)^2} + \frac{a_{11}}{x-2} + \frac{a_{21}}{x+2}.$$

Man bringt die rechte Seite auf den Hauptnenner

$$\frac{a_{12}}{(x-2)^2} + \frac{a_{11}}{x-2} + \frac{a_{21}}{x+2} = \frac{(a_{11}+a_{21})x^2 + (a_{12}-4a_{21})x + (2a_{12}-4a_{11}+4a_{21})}{x^3-2x^2-4x+8}$$

Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a_{11}+a_{21} &= 2, \\ a_{12}-4a_{21} &= 9, \\ 2a_{12}-4a_{11}+4a_{21} &= -22. \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung

Durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21} &= 2, \\ a_{12} - 4a_{21} &= 9, \\ 2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21} &= -22, \end{aligned}$$

findet man

$$a_{12} = 1, \quad a_{11} = 4, \quad a_{21} = -2.$$

Somit erhalten wir das Ergebnis

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)} = x + 5 + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x+2}.$$

Trick

Die Koeffizienten der Partialbrüche mit der höchsten Potenz einer Nullstelle lassen sich einfacher bestimmen, indem man im Ansatz mit $(x - x_j)^{\lambda_j}$ multipliziert und dann $x = x_j$ setzt.

In unserem Beispiel lassen sich so a_{12} und a_{21} bestimmen:

$$\begin{aligned} a_{12} &= \left. \frac{2x^2 + 9x - 22}{(x-2)^2(x+2)}(x-2)^2 \right|_{x=2} = \left. \frac{2x^2+9x-22}{x+2} \right|_{x=2} = \frac{8+18-22}{4} = 1, \\ a_{21} &= \left. \frac{2x^2 + 9x - 22}{(x-2)^2(x+2)}(x+2) \right|_{x=-2} = \left. \frac{2x^2+9x-22}{(x-2)^2} \right|_{x=-2} = \frac{8-18-22}{16} = -2. \end{aligned}$$

Abschnitt 4

Trigonometrische Funktionen

Trigonometrische Funktionen

Neben den Winkelfunktionen Sinus und Kosinus

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \qquad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right),$$

gibt es weitere trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, && \text{Tangens} \\
\cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}, && \text{Kotangens} \\
\sec x &= \frac{1}{\cos x}, && \text{Sekans} \\
\csc x &= \frac{1}{\sin x}, && \text{Kosekans}
\end{aligned}$$

Umkehrfunktionen

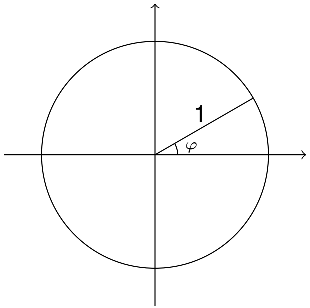
Die Umkehrfunktionen werden mit arcsin, arccos, arctan, etc. bezeichnet:

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \sin^{-1}(x), \quad \text{Arkussinus} \\
\arccos(x) &= \cos^{-1}(x), \quad \text{Arkuskosinus} \\
\arctan(x) &= \tan^{-1}(x), \quad \text{Arkustangens}
\end{aligned}$$

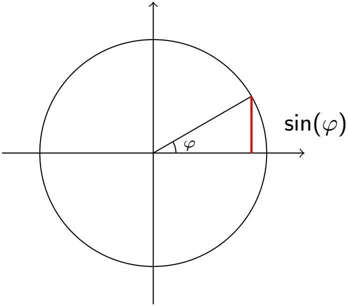
Diese Umkehrfunktionen lassen sich durch den Logarithmus ausdrücken:

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) &= \frac{1}{i} \ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right), \\
\arccos(x) &= \frac{1}{i} \ln\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right), \\
\arctan(x) &= \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right).
\end{aligned}$$

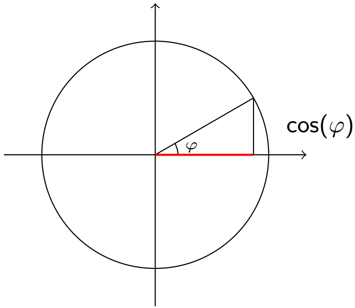
Geometrie



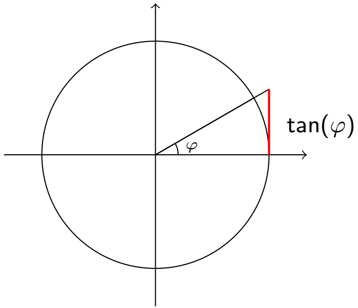
Geometrie



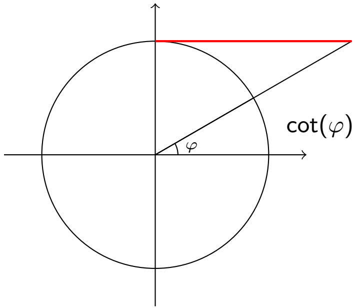
Geometrie



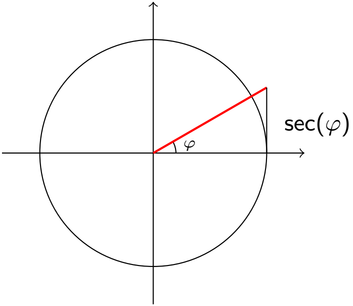
Geometrie



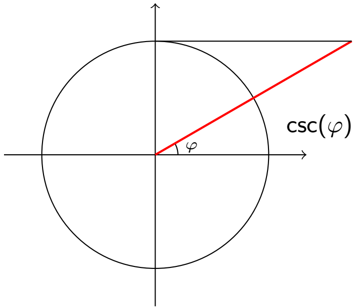
Geometrie



Geometrie



Geometrie



Abschnitt 5

Hyperbolische Funktionen

Hyperbolische Funktionen

Neben den bereits eingeführten hyperbolischen Funktionen

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \qquad \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right),$$

definiert man auch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Bemerkung: Für $\sinh$ und $\cosh$ gilt

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Umkehrfunktionen

Die inversen Funktionen werden als Areafunktionen bezeichnet:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \sinh^{-1}(x), \quad \text{Areasinus Hyperbolicus} \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \cosh^{-1}(x), \quad \text{Areakosinus Hyperbolicus} \\ \operatorname{artanh}(x) &= \tanh^{-1}(x), \quad \text{Areatangens Hyperbolicus} \end{aligned}$$

Diese Umkehrfunktionen lassen sich ebenfalls durch den Logarithmus ausdrücken:

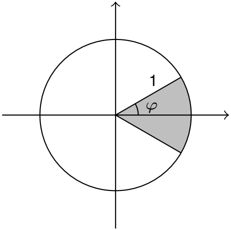
$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right), \\ \operatorname{arcosh}(x) &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), \\ \operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und hyperbolischen Funktionen

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{1}{i} \sinh\left(ix\right), \\
\cos x &= \cosh\left(ix\right), \\
\tan x &= \frac{1}{i} \tanh\left(ix\right), \\
\arcsin(x) &= \frac{1}{i} \mathrm{arsinh}\left(ix\right), \\
\arccos(x) &= \frac{1}{i} \mathrm{arcosh}\left(x\right), \\
\arctan(x) &= \frac{1}{i} \mathrm{artanh}\left(ix\right).
\end{aligned}
$$

Quiz

Die Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist



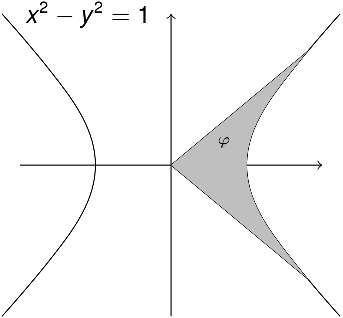
(A) $\frac{1}{6}$

(B) φ

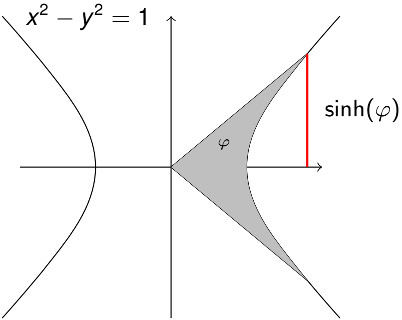
(C) 2φ

(D) $\sin(\varphi)\cos(\varphi)$

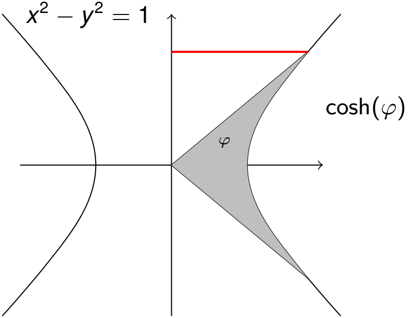
Hyperbolische Geometrie



Hyperbolische Geometrie



Hyperbolische Geometrie



Hyperbolische Geometrie