Differentialrechnung

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Die Ableitung

Die Ableitung

Definition

Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f nennt man im Punkte $x \in D$ **differenzierbar**, falls es mindestens eine Folge $(\xi_n) \in D \backslash x$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = x$ gibt und für jede solche Folge der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n) - f(x)}{\xi_n - x} = \lim_{\xi\to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

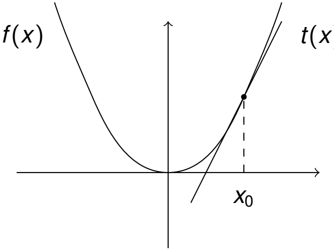
existiert.

Man schreibt auch

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}.$$

Geometrische Bedeutung der Ableitung

Die Ableitung $f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente im Punkte x_0 an:



$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) differenzierbar

(B) nicht differenzierbar

Quiz

Die Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) differenzierbar

(B) nicht differenzierbar

Sätze über Ableitungen

Satz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, und λf in x differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\ (\lambda f)'(x) &= \lambda f'(x). \end{aligned}$$

Produktregel:

Mit den Voraussetzungen wie oben ist auch die Funktion $f \cdot g$ in x differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Beweis der Produktregel

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x) = & \\
= & \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
= & \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) \right] \\
= & \lim_{h \to 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \\
= & f(x)g'(x) + f'(x)g(x).
\end{aligned}
$$

Die Produktregel

Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{x^2}_{f_1(x)} \underbrace{\sin(x)}_{f_2(x)} \\
f'(x) &= \underbrace{2x}_{f_1'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{f_2(x)} + \underbrace{x^2}_{f_1(x)} \underbrace{\cos(x)}_{f_2'(x)}
\end{aligned}
$$

Quotientenregel:

Quotientenregel: *Ist weiter $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch die Funktion f/g in x differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Die Quotientenregel

Beispiel

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x+1)-(2x-3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

Kettenregel:

Kettenregel: *Seien* $f : D_1 \rightarrow W_1$ *und* $g : D_2 \rightarrow W_2$ *Funktionen mit* $W_1 \subset D_2$. *Falls* f *im Punkte* $x \in D_1$ *differenzierbar ist und* g *im Punkte* $y = f(x) \in D_2$ *differenzierbar ist, so ist die zusammengesetzte Funktion* $g \circ f : D_1 \rightarrow W_2$ *in* x *differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x).$$

Die Kettenregel

Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin\left(3x^2 + 4x + 5\right) \\
f'(x) &= (6x+4) \cdot \cos\left(3x^2 + 4x + 5\right)
\end{aligned}
$$

Ableitung der Umkehrfunktion:

Ableitung der Umkehrfunktion: *Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \rightarrow W$ eine stetige, steng monotone Funktion und $f^{-1} : W \rightarrow D$ die Umkehrfunktion. Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und ist $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \quad = \quad \frac{1}{f'\left(x\right)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Die Ableitung der Umkehrfunktion

Beispiel

Die Ableitung des Logarithmus erhält man mit Hilfe der Regel über die Umkehrfunktion:
Wir beginnen mit der Exponentialfunktion: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$.
Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus:

$$f^{-1}(y) = \ln y$$

Nun ist

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y},$$

also

$$f(x) = \ln x, \qquad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Beispiel

Die Ableitungen von Sinus und Kosinus erhält man aus der Darstellung

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right), \qquad \cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

zu

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x), \\ f(x) = \cos(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x). \end{aligned}$$

Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin(x) &= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dx}e^{ix} - \frac{d}{dx}e^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(ie^{ix} + ie^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos(x) \end{aligned}$$

Wichtige Ableitungen

Ableitungen einiger Grundfunktionen:

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n x^{n-1},$$
$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x.$$

Die Ableitung des Logarithmus erhält man mit Hilfe der Regel über die Umkehrfunktion:

$$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Die Ableitungen von Sinus und Kosinus erhält man aus der Darstellung mittels der Exponentialfunktion:

$$f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x),$$
$$f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x).$$

Weitere Ableitungen

Die Ableitung aller weiteren trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen lassen sich ebenfalls mit den obigen Regeln bestimmen:

$$\begin{aligned}
f(x) = \tan(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \\
f(x) = \arcsin(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\
f(x) = \arctan(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\
f(x) = \sinh(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \cosh(x), \\
f(x) = \cosh(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \sinh(x), \\
f(x) = \tanh(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}, \\
f(x) = \mathrm{arsinh}(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \\
f(x) = \mathrm{artanh}(x) \quad &\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 4 \\ f'(x) &= ? \end{aligned}$$

(A) $\frac{3}{4}x^4 - 4x$

(B) $9x^2 - 4$

(C) $9x^2$

(D) $3x^2 - 4$

Quiz

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin(\cos(2x)) \\
f'(x) &= ?
\end{aligned}
$$

(A) $2\cos(\cos(2x))$

(B) $2\sin(2x)\cdot\cos(\cos(2x))$

(C) $-2\cos(2x)\cdot\cos(\sin(2x))$

(D) $-2\sin(2x)\cdot\cos(\cos(2x))$

Höhere Ableitungen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ ebenfalls wieder differenzierbar, so bezeichnet man mit

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = (f')'(x)$$

die zweite Ableitung. Ist auch $f''(x)$ wieder differenzierbar, so erhält man durch Ableiten die dritte Ableitung $f'''(x)$. Allgemein schreiben wir für die n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Unter der 0-ten Ableitung einer Funktion versteht man die Funktion selbst.

Höhere Ableitungen

Beispiel

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 5 \\
f'(x) &= 15x^4 + 28x^3 + 6x^2 + 2x - 1 \\
f''(x) &= 60x^3 + 84x^2 + 12x + 2 \\
f'''(x) &= 180x^2 + 168x + 12 \\
f^{(4)}(x) &= 360x + 168 \\
f^{(5)}(x) &= 360 \\
f^{(6)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Höhere Ableitungen

Beispiel

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ f'(x) &= \cos(x) \\ f''(x) &= -\sin(x) \\ f'''(x) &= -\cos(x) \\ f^{(4)}(x) &= \sin(x) \\ f^{(5)}(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} \\ f^{(4)}(x) &= \ ? \end{aligned}$$

(A) e^{2x}

(B) $2e^{2x}$

(C) $16e^{2x}$

(D) $24e^{2x}$

Stetige Differenzierbarkeit

Definition

Eine Funktion $f(x)$ nennt man stetig differenzierbar, falls sie differenzierbar ist und die Ableitung $f'(x)$ stetig ist.

Definition

Eine Funktion $f(x)$ nennt man n-mal stetig differenzierbar, falls sie n-mal differenzierbar ist und die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ stetig ist.

Stetige Differenzierbarkeit

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f ist differenzierbar im Punkt $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0.$$

Somit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f' ist nicht stetig im Punkt $x = 0$.

Abschnitt 2

Taylorreihen

Taylorreihen

Motivation:

- Wir haben bereits die Reihendarstellung einiger Funktionen, wie zum Beispiel der Exponentialfunktion, Sinus oder Kosinus kennengelernt.
- In diesem Abschnitt geht es um die systematische Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen.

Taylorentwicklung

Satz (Taylorsche Formel)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für $a \in I$ und $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_{n+1}(x).$$

Für das Restglied gilt: Es gibt ein ξ zwischen a und x (d.h. $\xi \in [a,x]$ für $x > a$ bzw. $\xi \in [x,a]$ für $x < a$), so daß

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

Bemerkung: Dies ist eine Existenzaussage, ξ ist im allgemeinen schwer zu bestimmen.

Taylorentwicklung

- In der Praxis verwendet man die ersten n Terme der Taylorentwicklung, um eine Funktion zu approximieren und vernachlässigt das Restglied.
- Das vernachlässigte Restglied liefert den Fehler dieser Abschätzung.

Taylorentwicklung

Beispiel

$$f(x) = \cos(x \cdot e^x) + \sin\left(x^2 \cdot e^{-x}\right)$$

Taylorentwicklung um $x_0 = 0$:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - 2x^3 - \frac{11}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)$$

Taylorreihen

Definition (Taylorreihe)

Sei nun $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig of differenzierbare Funktion und $a \in I$. Wir definieren die Taylorreihe einer Funktion f um den Entwicklungspunkt a:

$$T_f(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

Bemerkungen:

1. Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist nicht notwendig > 0.
2. Falls die Taylorreihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f.
3. Die Taylorreihe konvergiert genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, für die das Restglied gegen Null konvergiert.

Beispiel

Wir geben ein Gegenbeispiel zu Punkt 2 an: Wir betrachten die Taylorreihe der Funktion

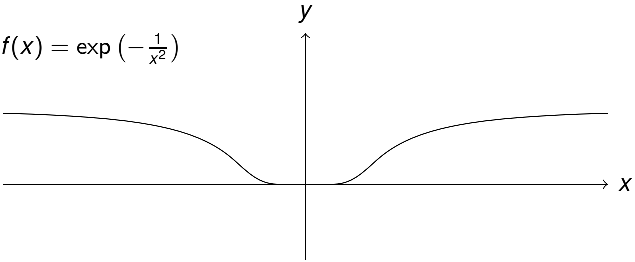
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

im Punkte $a = 0$. f ist beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Die Taylorreihe von f um den Nullpunkt ist also identisch Null.

Taylorreihen



Abschnitt 3

Die Regeln von l’Hospital

Die erste Regel von l'Hospital

Satz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in D$ stetige Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Weiter seien f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar. Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$, so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die erste Regel von l'Hospital

Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}.$$

Die zweite Regel von l'Hospital

Satz

Ist $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$ *und* $\lim\limits_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$ *und existitiert* $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$, *so gilt ebenfalls*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Die zweite Regel von l'Hospital

Beispiel

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} (-x) = 0.$$

Bemerkung: Die l'Hospitalschen Regeln gelten auch für $x_0 \to \pm\infty$.

Quiz

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 4}{x^2 + 6x + 5} \quad = \quad ?$$

(A) 0
(B) $\frac{1}{2}$
(C) $\frac{3}{2}$
(D) 3

Quiz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3+5x^2-3x-1}{x^3-20x^2+x+10} \quad = \quad ?$$

(A) 0

(B) $-\frac{1}{10}$

(C) 7

(D) 21

Mentoring-Programm für Studienanfängerinnen und -anfänger im Fach Physik

Was ist das Mentoring-Programm?

- Studierende („Mentees“) werden im ersten Bachelorsemester durch einen Professor bzw. eine Professorin aus der Physik unterstützt.
- Der Mentor/die Mentorin ist Anlaufstelle für Fragen zum Studium.
- Die Teilnahme ist freiwillig und kostet Sie nichts.

So können Sie teilnehmen:

- Alle Physik-Erstsemester erhalten am Ende der Einführungswoche, Freitag, 30. Oktober 2020, eine E-Mail mit näheren Anmeldeinfos.