Integralrechnung

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Integrale

Treppenfunktionen

Definition

Man nennt $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ **Treppenfunktion**, falls es eine Unterteilung

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

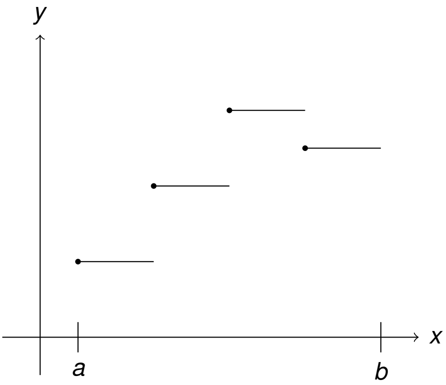
gibt, so daß t auf jedem offenen Intervall $]x_{j-1}, x_j[$ konstant ist. Der Wert auf diesem Intervall sei mit c_j bezeichnet.

Definition

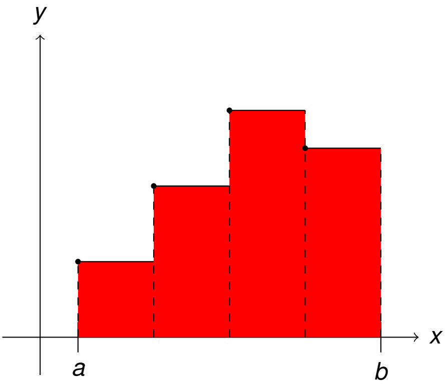
Das **Integral einer Treppenfunktion** wird definiert als

$$\int\limits_a^b t(x)\, dx \quad = \quad \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \left(x_j - x_{j-1} \right).$$

Treppenfunktionen



Treppenfunktionen



Treppenfunktionen

- Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ bilden einen Vektorraum.
- Wir bezeichnen diesen Vektorraum mit $T[a, b]$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion und $t \in T[a, b]$.
  Man schreibt $f \geq t$ falls $f(x) \geq t(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Ober- und Unterintegrale

Definition

Wir definieren nun das Ober- und Unterintegral für f:

$$\int_a^{b^*} f(x)\,dx = \inf\left\{\int_a^b t(x)\,dx;\ t \in T[a,b],\ t \geq f\right\},$$

$$\int_{a\,*}^{b} f(x)\,dx = \sup\left\{\int_a^b t(x)\,dx;\ t \in T[a,b],\ t \leq f\right\}.$$

Das Riemann-Integral

Definition

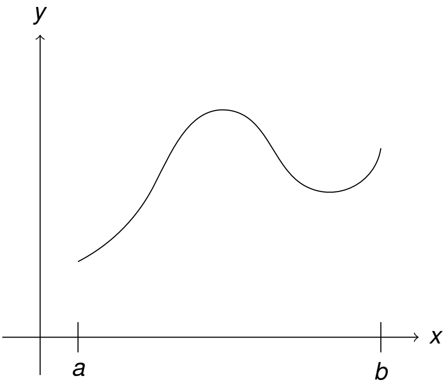
Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, falls

$$\int\limits_a^{b^*} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_{a_*}^{b} f(x)\,dx.$$

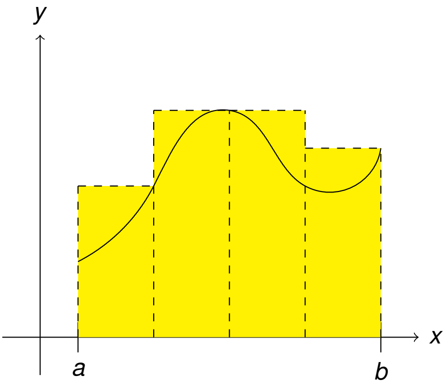
In diesem Fall setzt man

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx \;=\; \int\limits_a^{b^*} f(x)\,dx.$$

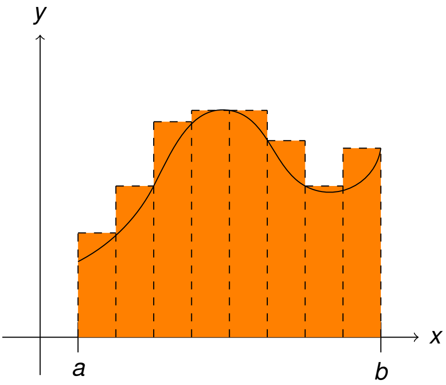
Approximation durch Treppenfunktionen



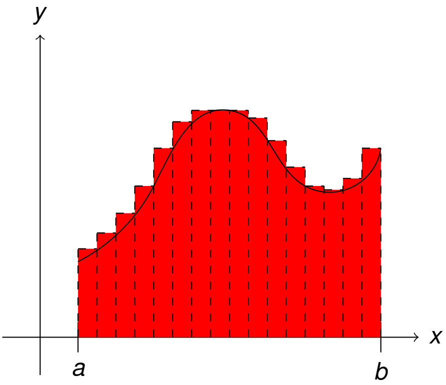
Approximation durch Treppenfunktionen



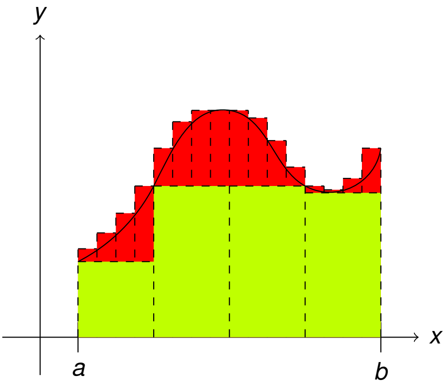
Approximation durch Treppenfunktionen



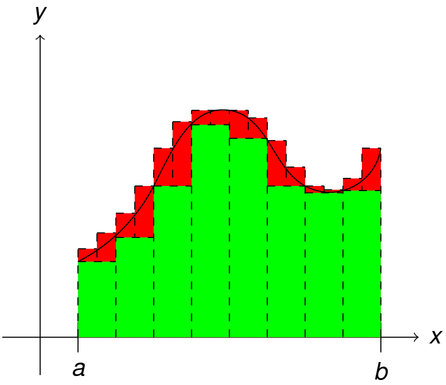
Approximation durch Treppenfunktionen



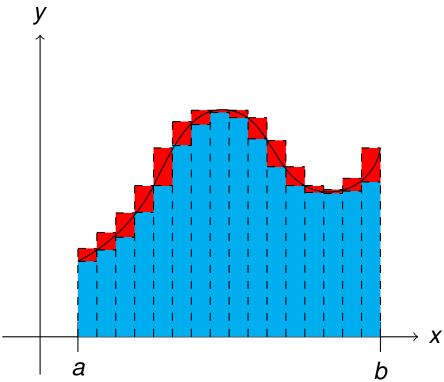
Approximation durch Treppenfunktionen



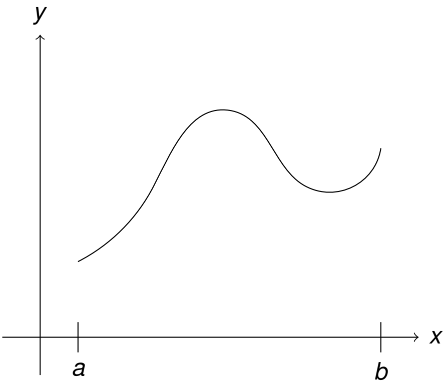
Approximation durch Treppenfunktionen



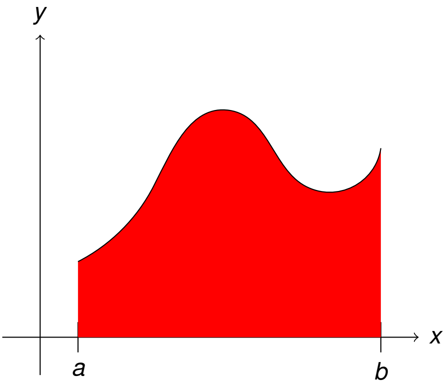
Approximation durch Treppenfunktionen



Geometrische Interpretation des Integrals



Geometrische Interpretation des Integrals



Das Riemann-Integral

Beispiel

$$\int\limits_0^1 f(x)\, dx, \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht Riemann-integrierbar: Alle Obersummen sind stets 1, alle Untersummen sind stets 0.

(Diese Funktion ist Lebesgue-integrierbar.)

Sätze über integrierbare Funktionen

Satz

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Satz

Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Satz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und $\lambda \cdot f$ integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int\limits_a^b (f+g)(x)\, dx &= \int\limits_a^b f(x)\, dx + \int\limits_a^b g(x)\, dx, \\ \int\limits_a^b (\lambda f)(x)\, dx &= \lambda \int\limits_a^b f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Sätze über integrierbare Funktionen

Satz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion $f \cdot g$ integrierbar.

Im Allgemeinen ist allerdings

$$\int\limits_a^b (f \cdot g)(x)\, dx \;\neq\; \left(\int\limits_a^b f(x)\, dx \right) \cdot \left(\int\limits_a^b g(x)\, dx \right).$$

Stammfunktionen

Definition

Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F'(x) = f(x)$.

Eine weitere Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann ebenfalls eine Stammfunktion, falls $F - G$ eine Konstante ist.

Man schreibt auch

$$F(x) = \int f(x)\, dx.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird auch als **unbestimmtes Integral** bezeichnet.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Sei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \;=\; F(b) - F(a).$$

Man schreibt auch

$$F(x)|_a^b \;=\; F(b) - F(a).$$

Stammfunktionen

Stammfunktionen einiger Grundfunktionen:

$$
\begin{aligned}
f(x) = x^n \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1, \\
f(x) = e^x \quad &\Rightarrow \quad F(x) = e^x, \\
f(x) = \frac{1}{x} \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \ln|x|, \\
f(x) = \sin(x) \quad &\Rightarrow \quad F(x) = -\cos(x), \\
f(x) = \cos(x) \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \sin(x), \\
f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad &\Rightarrow \quad F(x) = \arctan(x).
\end{aligned}
$$

Quiz

Gesucht ist eine Stammfunktion zu

$$3x^2 - 4x + 5$$

(A) $6x - 4$

(B) $3x^3 - 4x^2 + 5x$

(C) $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5x$

(D) $x^3 - 2x^2 + 5x + 42$

Substitutionsregel

Satz

Sei $f : [a, b] \to W_1$ eine stetig differenzierbare Funktion und $g : D_2 \to W_2$ eine stetige Funktion mit $W_1 \subset D_2$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b g\left(f(x)\right) f'(x)\, dx \quad = \quad \int\limits_{f(a)}^{f(b)} g(x)\, dx.$$

Substitutionsregel

Beispiel

Wir betrachten das Integral

$$I = \int\limits_0^\pi d\theta \, \sin\theta \left(5\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 \right).$$

Für die Substitution $u = -\cos\theta$ gilt

$$\frac{du}{d\theta} = \sin\theta$$

und daher ergibt sich mit Hilfe der Substitutionsregel

$$I = \int\limits_{-1}^{1} du \left(5u^2 - 3u + 1 \right) = \left(\frac{5}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + u \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}.$$

Partielle Integration

Satz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x) g'(x)\, dx \quad = \quad f(x) g(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x) g(x)\, dx.$$

Beispiel

Wir betrachten das Integral

$$I = \int\limits_0^1 dx \; x \; e^x.$$

Setzen wir $f(x) = x$ und $g'(x) = \exp(x)$, so läßt sich die partielle Integration anwenden, falls wir eine Stammfunktion zu $g'(x)$ kennen. In diesem Beispiel ist dies besonders einfach, es ist $g(x) = \exp(x)$. Somit erhalten wir

$$I = x \; e^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 dx \; e^x = (x-1) \; e^x\Big|_0^1 = 1.$$

Abschnitt 2

Integrale über rationale Funktionen

Integrale über rationale Funktionen

Wir betrachten als Beispiel

$$I = \int\limits_0^1 \frac{x^4+3x^3-12x^2-3x+18}{(x-2)^2(x+2)}\, dx.$$

Im ersten Schritt zerlegt man den Integranden mit Hilfe der Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^4+3x^3-12x^2-3x+18}{(x-2)^2(x+2)} = x+5+\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{4}{x-2}-\frac{2}{x+2}.$$

Somit ist

$$I = \int\limits_0^1 (x+5)\, dx + \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} + 4\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-2} - 2\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+2}.$$

$$I = \int\limits_0^1 (x+5)\ dx + \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} + 4\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-2} - 2\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+2}.$$

Wir berechnen nun die einzelnen Integrale:

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^1 (x+5)\ dx &= \left.\frac{1}{2}x^2 + 5x\right|_0^1 = \frac{11}{2}, \\
\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-2)^2} &= \left.-\frac{1}{x-2}\right|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\
\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-2} &= \ln\left(|x-2|\right)\Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2, \\
\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+2} &= \ln\left(|x+2|\right)\Big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2,
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^1 \frac{x^4+3x^3-12x^2-3x+18}{(x-2)^2(x+2)}\,dx \\ &= \frac{11}{2}+\frac{1}{2}+4\left(-\ln 2\right)-2\left(\ln 3-\ln 2\right) \\ &= 6-2\ln 2-2\ln 3 \\ &= 6-2\ln 6. \end{aligned}$$

Abschnitt 3

Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale

Definition

Unter einem uneigentlichen Integral versteht man ein Integral, bei dem eine Integrationsgrenze unendlich ist oder bei dem der Integrand an einer Integrationsgrenze nicht definiert ist. Es kann auch eine Kombination der beiden Fälle auftreten.

Uneigentliche Integrale

Wir betrachten zunächst den Fall, daß eine Integrationsgrenze unendlich ist. Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Intervall $[a, \Lambda]$ mit $a < \Lambda < \infty$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \int\limits_a^\Lambda f(x)\, dx$$

existiert, nennt man das Integral von a bis Unendlich konvergent und man setzt

$$\int\limits_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{\Lambda \to \infty} \int\limits_a^\Lambda f(x)\, dx.$$

Analog definiert man das Integral für das Intervall $]-\infty, b]$.

Uneigentliche Integrale

Beispiel

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{\Lambda\to\infty} \int\limits_1^\Lambda \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\Lambda\to\infty} \left.\frac{1}{x}\right|_1^\Lambda = 1 - \lim_{\Lambda\to\infty} \frac{1}{\Lambda} = 1.$$

Uneigentliche Integrale

Wir betrachten nun den Fall, daß der Integrand an einer Intervallgrenze nicht definiert ist. Sei $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[a + \varepsilon, b]$ mit $0 < \varepsilon < (b - a)$ Riemann-integrierbar ist. Falls der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

existiert, nennt man das Integral über $[a, b]$ konvergent und man setzt

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

Analog definiert man das Integral für den Fall in der die Funktion an der oberen Intevallgrenze nicht definiert ist.

Uneigentliche Integrale

Beispiel

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad = \quad \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \lim_{\varepsilon \to 0+} \left. \sqrt{x} \right|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2 \lim_{\varepsilon \to 0+} \sqrt{\varepsilon} = 2.$$

Uneigentliche Integrale: Allgemeiner Fall

Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, eine Funktion, die über jedem Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$ Riemann-integrierbar ist und sei $c \in]a, b[$ beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int\limits_a^c f(x)\, dx = \lim_{\alpha \to a+} \int\limits_\alpha^c f(x)\, dx, \qquad \int\limits_c^b f(x)\, dx = \lim_{\beta \to b-} \int\limits_c^\beta f(x)\, dx$$

existieren, nennt man das Integral über $]a, b[$ konvergent und man setzt

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \quad = \quad \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx.$$

Quiz

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{9}{10}}} = ?$$

(A) 0

(B) 1

(C) 9

(D) 10

Organisation der nächsten Woche

Aufgrund von diversen Einführungsveranstaltungen:

- Mittwoch, 28.10.2020: Plenum um 13:00h
  (11:00h Erstsemesterbegrüßung des Präsidenten)
- Freitag, 30.10.2020: keine Vorlesung, kein neues Übungsblatt. Plenum und Übungsgruppen finden wie gewohnt statt.