Differentialgleichungen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Allgemeines

Einführung

Es sei $f(x)$ eine unbekannte Funktion der Variablen x.
Nehmen wir weiter an, es sei bekannt, daß $f(x)$ die Gleichung

$$f(x)^2 - x \cdot f(x) - 1 = 0$$

erfüllt.
Dies ist eine algebraische Gleichung für $f(x)$.
Durch Auflösen nach $f(x)$ finden wir

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{x^2+4}\right)$$

Einführung

In den Naturwissenschaften tritt oft der Fall auf, daß wir eine Gleichung bestimmen können, die die unbekannte Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$ enthält.

Beispiel

$$f'(x) - x \cdot f(x) = 0$$

Eine solche Gleichung nennt man eine Differentialgleichung.

Einführung

- Die Theorie der Differentialgleichungen geht weit über den Inhalt des mathematischen Brückenkurses hinaus.
- In den Naturwissenschaften treten einige wenige Differentialgleichungen relativ oft auf.
- In dieser Vorlesung: Einstieg in die Differentialgleichungen mittels wichtiger Beispiele und elementarer Lösungsmethoden.

Klassifizierung

- Tritt nur die Ableitung nach einer Variablen auf, spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung.
- Hängt dagegen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, und treten Ableitungen nach verschiedenen Variablen auf, so spricht man von einer partiellen Differentialgleichung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Tritt neben der unbekannten Funktion f nur die erste Ableitung f' auf, so spricht man von einer Differentialgleichung erster Ordnung.
- Ist die höchste auftretende Ableitung $f^{(n)}$, so spricht man von einer Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Definition

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und

$$\begin{aligned} G \quad : \quad & D \to \mathbb{R}, \\ & (x, y) \to G(x, y) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' \quad = \quad G(x, y)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion

$$f \quad : \quad I \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- *Der Graph von f ist in D enthalten, d.h.*

$$\Gamma_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subset D.$$

- *Es gilt*

$$f'(x) \quad = \quad G(x, f(x)).$$

Beispiel

$G(x, y) = -\lambda y$ führt auf die Differentialgleichung

$$f'(x) = -\lambda f(x).$$

Definition

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned} G \quad : \quad & D \to \mathbb{R}, \\ & (x, \vec{y}) \to G(x, \vec{y}) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y^{(n)} = G\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$$

eine Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion

$$f \quad : \quad I \to \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften:

- *Die Menge*

$$\left\{ (x, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n : y_j = f^{(j)}(x), 0 \leq j < n \right\}$$

  ist in D enthalten.

- *Es gilt*

$$f^{(n)}(x) \quad = \quad G\left(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n-1)}(x) \right).$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel

$G(x, y_0, y_1) = -\omega^2 y_0$ führt auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f''(x) = -\omega^2 f(x).$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

- Die Sätze über die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen einer Differentialgleichung setzen voraus, daß die Funktion G lokal eine Lipschitz-Bedingung erfüllt.

Lipschitz-Bedingung

Definition (Lipschitz-Bedingung für eine Differentialgleichung erster Ordnung)

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und

$$\begin{aligned} G \quad : \quad & D \to \mathbb{R}, \\ & (x, y) \to G(x, y) \end{aligned}$$

eine Funktion. Man sagt, G genügt in D einer **Lipschitz-Bedingung** mit der Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$, falls für alle (x, y), $(x, z) \in D$ gilt

$$|G(x, y) - G(x, z)| \quad \leq \quad L\,|y - z|\,.$$

Eindeutigkeit von Lösungen

Satz

Wir setzen voraus, daß die Funktion G in D lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = G\left(x, \vec{y}\right)$$

über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Gilt dann

$$f^{(j)}\left(x_0\right) = g^{(j)}\left(x_0\right) \qquad \forall\, 0 \leq j < n$$

für ein $x_0 \in I$, so folgt

$$f\left(x\right) = g\left(x\right)$$

für alle $x \in I$.

Existenz von Lösungen

Satz (Picard – Lindelöf)

Sei D offen und $G : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $(x_0, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n-1}) \in D$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung

$$f \quad : \quad [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung $y^{(n)} = G\left(x, \vec{y}\right)$ mit der Anfangsbedingung

$$f^{(j)}(x_0) \quad = \quad \tilde{y}_j \qquad 0 \leq j < n.$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Zusammenfassung:

Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung wird eindeutig durch n *Anfangsbedingungen*

$$f(x_0), f'(x_0), ..., f^{(n-1)}(x_0)$$

bestimmt.

Abschnitt 2

Wichtige Beispiele

Exponentielles Wachstum / exponentieller Zerfall

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f'(x) = -\lambda f(x).$$

Gesucht ist eine Lösung zur Anfangsbedingung

$$f(0) = C.$$

Exponentielles Wachstum / exponentieller Zerfall

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = Ce^{-\lambda x}.$$

Es ist

$$f'(x) = -\lambda C e^{-\lambda x} = -\lambda f(x).$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$f(0) = C.$$

Quiz

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) \quad = \quad 2f(x)$$

zur Anfangsbedingung $f(0) = 2$ ist

(A) $f(x) = 2e^x$

(B) $f(x) = e^{2x}$

(C) $f(x) = 2e^{2x}$

(D) $f(x) = 2e^{-2x}$

Exponentielles Wachstum

Beispiel

Annahme: Eine mit einem Virus infizierte Person steckt im Mittel pro Tag 1.3 nicht-infizierte Personen an.
Zu Beginn der Zählung seien 10 000 Personen infiziert.
Wie viele Personen sind nach 10 Tagen infiziert?

Exponentielles Wachstum

Es sei $f(t)$ die Anzahl der infizierten Personen am Tag t.
Die Anzahl der Neuinfizierten pro Tag ist proportional zur Anzahl der bereits infizierten Personen, daher haben wir die Differentialgleichung

$$f'(t) = \kappa f(t),$$

deren Lösung durch

$$f(t) = Ce^{\kappa t}$$

gegeben ist.

Exponentielles Wachstum

Wir bestimmen die Konstante C aus der Anfangsbedingung:

$$f(0) = 10000 \quad \Rightarrow \quad C = 10000.$$

Wir bestimmen die Konstante κ aus der Veränderung pro Tag:
Nach einem Tag haben wir 23000 Infizierte
(13000 neu Infizierte plus 10000 bereits Infizierte):

$$f(1) = 23000 \quad \Rightarrow \quad 10000 e^{\kappa} = 23000 \quad \Rightarrow \quad \kappa = \ln(2.3)$$

Somit

$$\begin{aligned} f(t) &= 10000 \cdot (2.3)^t, \\ f(10) &\approx 41 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Exponentielles Wachstum

Bemerkungen:

- Wir haben angenommen, daß eine infizierte Person ansteckend bleibt.
- Wir haben Sättigungseffekte vernachlässigt: Sind alle Personen infiziert, können keine neuen Personen mehr infiziert werden.

Der harmonische Oszillator

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f''(t) \;=\; -\omega^2 f(t).$$

Gesucht ist eine Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$f(0) \;=\; x_0, \qquad f'(0) \;=\; v_0.$$

Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)$$

Es ist

$$\begin{aligned} f'(t) &= \omega A_1 \cos(\omega t) - \omega A_2 \sin(\omega t), \\ f''(t) &= -\omega^2 A_1 \sin(\omega t) - \omega^2 A_2 \cos(\omega t) = -\omega^2 f(t). \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$\begin{aligned} x_0 &= f(0) = A_1 \sin(0) + A_2 \cos(0) = A_2, \\ v_0 &= f'(0) = \omega A_1 \cos(0) - \omega A_2 \sin(0) = \omega A_1. \end{aligned}$$

Der harmonische Oszillator

Somit lautet die Lösung

$$f(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Wir können auch die Funktion

$$f(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

betrachten. Es ist

$$\begin{aligned} f'(t) &= i\omega c_1 e^{i\omega t} - i\omega c_2 e^{-i\omega t}, \\ f''(t) &= -\omega^2 c_1 e^{i\omega t} - \omega^2 c_2 e^{-i\omega t} = -\omega^2 f(t). \end{aligned}$$

Aufgrund von

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right), \qquad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right),$$

ist dies äquivalent zur vorherigen Lösung.

Beispiel

Für ein Federpendel ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung:

$$F = -Dx,$$

wobei D die Federkonstante angibt. Das Newtonsche Gesetz lautet

$$F = ma,$$

wobei a die Beschleunigung angibt. Die Beschleunigung ist die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit.

Der harmonische Oszillator

Für die Auslenkung $x(t)$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$x''(t) = -\frac{D}{m} x(t).$$

Dies ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Lösung

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Quiz

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) \quad = \quad \omega^2 f(x)$$

zu den Anfangsbedingungen $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$ ist

(A) $f(x) = 2cos(\omega x)$

(B) $f(x) = 2cos(\omega x) + \frac{2}{\omega} sin(\omega x)$

(C) $f(x) = cos(2\omega x)$

(D) $f(x) = 2cosh(\omega x)$

Abschnitt 3

Elementare Lösungsmethoden

Elementare Lösungsmethoden

Wir betrachten eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' \quad = \quad G(x, y)$$

Elementare Lösungsmethoden

Hängt die Funktion G nur von x, aber nicht von y ab, so hat man

$$f'(x) \quad = \quad G(x)$$

und man erhält eine Lösung durch Integration:

$$f(x) \quad = \quad c + \int\limits_{x_0}^{x} G(t)\, dt.$$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Als nächstes betrachten wir den Fall, daß die Funktion G faktorisiert:

$$G(x, y) = h(x)k(y).$$

In diesem Fall spricht man von einer Differentialgleichungen mit separierten Variablen.

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Wir wollen annehmen, daß

$$h : I \to \mathbb{R}, \qquad k : J \to \mathbb{R},$$

stetige Funktionen auf offenen Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ sind. Weiter sei $k(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Sei nun $(x_0, y_0) \in I \times J$. Wir setzen

$$H(x) = \int\limits_{x_0}^{x} h(t) dt, \qquad K(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{k(t)}.$$

Es sei $I' \subset I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $H(I') \subset K(J)$. Dann exisitiert genau eine Lösung $f : I' \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_0) = y_0.$$

Diese Lösung erfüllt die Beziehung

$$K\left(f(x)\right) = H(x).$$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 2xe^{-y}$$

und suchen eine Lösung zu der Anfangsbedingung $f(0) = c$. Die Variablen sind klarerweise getrennt. Für dieses Beispiel können wir

$$h(x) = 2x, \qquad k(y) = e^{-y}$$

setzen.

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Wir erhalten

$$\begin{aligned} H(x) &= 2 \int\limits_0^x t \, dt = x^2, \\ K(y) &= \int\limits_c^y \frac{dt}{e^{-t}} = e^y - e^c. \end{aligned}$$

Somit

$$e^{f(x)} - e^c = x^2.$$

Umgeformt ergibt sich

$$f(x) = \ln\left(x^2 + e^c\right).$$

Beispiel

Als zweites Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = y^2.$$

Gesucht ist eine Lösung zu der Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Wir haben

$$\frac{dy}{y^2} = dx,$$

und somit liefert die Integration

$$-\frac{1}{y} = x + c.$$

Durch Auflösen nach y erhält man

$$y = -\frac{1}{x+c}.$$

Die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ liefert $c = -1$, somit lautet die Lösung

$$y = \frac{1}{1-x}.$$