Fehlerrechnung

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Motivation

Motivation

Eine Person A mißt eine bestimmte Größe experimentell. Sie führt diese Messung öfters durch. Aufgrund der experimentellen Meßungenauigkeit ergeben sich leicht unterschiedliche Werte.

Meßreihe 1:

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ergebnis	2.6	2.3	2.5	2.3	2.6	2.4	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.8	2.7

Wir definieren den Mittelwert einer Meßreihe mit n Meßpunkten als

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Für die obige Meßreihe ergibt sich

$$\bar{x} = 2.48$$

Motivation

Eine Person B bestimmt die gleiche Größe ebenfalls experimentell. Person B verwendet allerdings eine schlechtere Meßapparatur und führt weniger Messungen durch. Person B erhält die folgenden Meßwerte:

Meßreihe 2:

Messung	1	2	3	4
Ergebnis	0.3	5.2	3.1	1.4

Der Mittelwert ergibt sich zu

$$\bar{x} = 2.48$$

Motivation

- Im zweiten Fall streuen die einzelnen Messungen wesentlich stärker als im ersten Fall.
- Es ist daher offensichtlich, daß das Ergebnis von Person A vertauenswürdiger als das Ergebnis von Person B ist.
- Wir wollen nun diese Aussage quantitativ machen und suchen ein Maß für die Streuung der Meßpunkte.

Abschnitt 2

Grundlagen

Definition

$$\begin{aligned} \Omega &: \text{Ergebnismenge eines Zufallsexperiments,} \\ \text{Zufallsfunktion} &: \text{Funktion } X: \Omega \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsgröße X:

$$W: x \rightarrow P\left(\omega | X(\omega) = x\right).$$

Erwartungswert einer Zufallsgröße: Nimmt die Zufallsgröße X die Werte x_1, x_2, ..., x_n an, so bezeichnet man mit

$$\mu(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j W(x_j)$$

den Erwartungswert von X.

Satz

Entsprechen die einzelnen Messungen einzelnen unabhängigen Realisierungen eines Zufallsexperiments, so ist der Mittelwert $\bar{x}$ eine Schätzung für $\mu(X)$.

Varianz und Standardabweichung

Definition

Die Varianz einer Zufallsgröße ist definiert durch

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^2 \, W(x_j).$$

Definition

Die Standardabweichung einer Zufallsgröße ist definiert durch

$$\sigma(X) \;=\; \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Schätzfunktion für die Varianz

Kennen wir den Erwartungswert μ einer Zufallsgröße und machen n Messungen x_j, so ist

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \mu \right)^2$$

eine Schätzfunktion für die Varianz.

Im Allgemeinen ist μ aber nicht bekannt und man verwendet $\bar{x}$ als Schätzung für μ. In diesem Fall ist

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \bar{x} \right)^2$$

eine Schätzfunktion für die Varianz der Zufallsgröße X.

Sätze über die Varianz

Sei $c \in \mathbb{R}$ und seien X_1, X_2, ..., X_n unabhängige Zufallsgrößen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Var(cX) &= c^2 \; Var(X)\,, \\ Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) &= Var(X_1) + Var(X_2) + ... + Var(X_n)\,. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\frac{1}{n}\underbrace{(X + X + ... + X)}_{n \text{ mal}}\right) &= \frac{1}{n^2}\left(\text{Var}\,(X) + \text{Var}\,(X) + ... + \text{Var}\,(X)\right) \\ &= \frac{1}{n}\text{Var}\,(X)\,. \end{aligned}$$

Varianz des Mittelwertes

Es interessiert in erster Linie nicht die Varianz der einzelnen Messungen $\text{Var}(X)$, sondern die Varianz des Mittelwertes $\text{Var}(\bar{X})$. Bei n Messungen gilt:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\text{Var}(X).$$

Somit erhält man als Schätzung für die Varianz des Mittelwertes

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n}S^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)^2.$$

Für die Standardabweichung erhält man

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)^2}.$$

Beispiel

Somit findet man für die beiden oben aufgeführten Meßreihen:

$$\begin{aligned} \text{Meßreihe 1}: \quad & \sigma_{\bar{X}} = 0.05, \\ \text{Meßreihe 2}: \quad & \sigma_{\bar{X}} = 1.07. \end{aligned}$$

Es ist üblich mit dem Mittelwert auch immer die Standardabweichung anzugeben, also

$$\begin{aligned} \text{Meßreihe 1}: \quad & x = 2.48 \pm 0.05, \\ \text{Meßreihe 2}: \quad & x = 2.48 \pm 1.07. \end{aligned}$$

Die Normalverteilung

Zur Interpretation der Standardabweichung betrachten wir zunächst kontinuierliche Zufallsgrößen. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(x)$ für eine kontinuierliche Zufallsgröße beschreibt

$$P\left(a < X \leq b\right) = \int\limits_a^b p(x)\, dx.$$

Definition: Man nennt eine kontinuierliche Zufallsgröße normalverteilt, falls sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right)$$

besitzt. Der Erwartungswert dieser normalverteilten Zufallsgröße ist μ, die Standardabweichung ist σ.

Die Normalverteilung

Für eine normalverteilte Zufallsgröße gilt:

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) &\approx 68.27\%, \\ P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) &\approx 95.45\%, \\ P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) &\approx 99.73\%. \end{aligned}$$

Quiz

Ein Experiment mißt eine Größe O und berichtet

$$O = 5.94 \pm 0.02$$

Dies bedeutet:

(A) Der wahre Wert der Observablen O ist 5.94.

(B) Der wahre Wert der Observablen O liegt im Intervall $[5.92, 5.96]$.

(C) Die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Wert der Observablen O im Intervall $[5.92, 5.96]$ liegt, beträgt 99.7%.

(D) Die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Wert der Observablen O im Intervall $[5.92, 5.96]$ liegt, beträgt 68.3%, falls der Meßwert einer Normalverteilung folgt.

Abschnitt 3

Fehlerfortpflanzung

Problemstellung

Gesucht wird eine Größe $f = f(x, y)$ die von zwei weiteren Größen x und y abhängt.
Die Funktion f wird als bekannt vorausgesetzt, die Größen x und y werden durch eine Messung mit Fehlern $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ bestimmt.
Gesucht ist nun der Fehler für die Größe f.

Fehlerfortpflanzung

Für die Größe f beginnen wir mit der Taylorentwicklung:

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) = f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + ...$$

Wir nehmen an, daß wir n Messungen für die Größen x und y haben, die einzelnen Meßwerte seien mit x_j und y_j bezeichnet. Somit haben wir auch n Ergebnisse für f. Für die Abweichung eines Einzelergebnisses vom Mittelwert gilt für kleine Abweichungen

$$f_j - \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(x_j - \bar{x}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(y_j - \bar{y}\right) + ...$$

Fehlerfortpflanzung

$$f_j - \bar{f} \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(x_j - \bar{x} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(y_j - \bar{y} \right) + ...$$

Somit gilt für die Varianz:

$$\sigma_f^2 =$$

$$= \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(f_j - \bar{f} \right)^2$$

$$= \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\left(x_j - \bar{x} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(y_j - \bar{y} \right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(x_j - \bar{x} \right) \left(y_j - \bar{y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]$$

Kovarianz

Wir definieren die **Kovarianz** als

$$\mathrm{Cov}(x, y) \quad = \quad \sigma_{xy} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \bar{x}\right) \left(y_j - \bar{y}\right)$$

Somit haben wir

$$\sigma_f^2 \quad = \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sigma_{xy}.$$

Unkorrelierte Zufallsgrößen

Falls x und y unkorreliert sind, gilt $\sigma_{xy} = 0$ und somit

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2,$$

bzw.

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2}.$$

Beispiele: Addition

1. $f = x + y$. In diesem Fall haben wir

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2},$$

man sagt, die (absoluten) Fehler addieren sich quadratisch.

Beispiele: Addition

Beispiel

$$f = x + y, \qquad \sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Es sei $x = 15 \pm 3$ und $y = 17 \pm 4$.

Es ist

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \bar{x} + \bar{y} = 15 + 17 = 32, \\ \sigma_f &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \end{aligned}$$

Somit

$$f = 32 \pm 5.$$

Beispiele: Multiplikation

2. $f = x \cdot y$. In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{y^2 \sigma_x^2 + x^2 \sigma_y^2},$$

oder anders geschrieben

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Bei einem Produkt addieren sich die relativen Fehler quadratisch.

Beispiele: Multiplikation

Beispiel

$$f = x \cdot y, \qquad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Es sei $x = 2 \pm 0.06$ und $y = 5 \pm 0.2$.

Es ist

$$\begin{aligned}
\bar{f} &= \bar{x} \cdot \bar{y} = 2 \cdot 5 = 10, \\
\sigma_f &= f\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = 10\sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt{400}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Somit

$$f = 10 \pm 0.5.$$

Beispiele: Subtraktion

3. $f = x - y$. Hier findet man wie bei einer Summe

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Quiz

Es sei $x = 17 \pm 4$ und $y = 15 \pm 3$, sowie

$$f = x - y.$$

Mittelwert und Fehler für f ergeben sich zu

(A) $f = 2 \pm 1$

(B) $f = 2 \pm \sqrt{7}$

(C) $f = 2 \pm 4$

(D) $f = 2 \pm 5$

Beispiele: Division

4. $f = \frac{x}{y}$. In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{y^2}\sigma_x^2 + \frac{x^2}{y^4}\sigma_y^2}.$$

Schreibt man dies mit Hilfe der relativen Fehler erhält man wie beim Produkt

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Beispiele: Division

Beispiel

$$f = \frac{x}{y}, \qquad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Es sei $x = 2 \pm 0.06$ und $y = 5 \pm 0.2$.

Es ist

$$\bar{f} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{2}{5} = 0.4,$$

$$\sigma_f = f\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} = \frac{2}{5}\sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{2}{5\sqrt{400}} = \frac{1}{50}.$$

Somit

$$f = 0.4 \pm 0.02.$$

Beispiele: Potenzen

5. Zum Abschluss betrachten wir noch $f = x^a y^b$. Man erhält

$$\sigma_f = \sqrt{\left(a x^{a-1} y^b\right)^2 \sigma_x^2 + \left(b x^a y^{b-1}\right)^2 \sigma_y^2}$$

Auch hier empfiehlt es sich wieder, die Formel in relativen Fehler zu schreiben:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{a^2 \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + b^2 \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Abschnitt 4

Kombination von Messungen

Anwendungsbeispiel

Wir hatten zuvor den Fall betrachtet, daß eine Größe durch zwei Meßreihen experimentell bestimmt wird:

$$\begin{aligned} \text{Meßreihe 1}: &\quad x = 2.48 \pm 0.05, \\ \text{Meßreihe 2}: &\quad x = 2.48 \pm 1.07. \end{aligned}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man diese Ergebnisse miteinander kombiniert.

Kombination von Messungen

Etwas allgemeiner seien für eine Größe x n Messungen x_j mit Fehlern σ_j gegeben.

Dann setzt man

$$x = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2} x_1 + \frac{1}{\sigma_2^2} x_2 + ... + \frac{1}{\sigma_n^2} x_n}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + ... + \frac{1}{\sigma_n^2}}, \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + ... + \frac{1}{\sigma_n^2}}}.$$

Anwendungsbeispiel

Für das Beispiel hat man

$$\begin{aligned} x_1 &= 2.48, & \sigma_1 &= 0.05, \\ x_2 &= 2.48, & \sigma_2 &= 1.07. \end{aligned}$$

Man findet somit

$$x = 2.48, \qquad \sigma = 0.04995.$$

Die zweite Meßreihe liefert keinen wesentlichen Beitrag zur Verbesserung des Fehlers.