Funktionen mehrerer Variablen

Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

Abschnitt 1

Partielle Ableitungen

Definition

Sei U eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten Funktionen

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad U \to \mathbb{R}, \\ (x_1, ..., x_n) \quad &\to \quad f(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Beispiel

$U = \mathbb{R}^2$.

$$f(x_1, x_2) \quad = \quad x_1^2 + x_2^2$$

Partielle Ableitung

Definition

Die Funktion f ist **partiell differenzierbar in der i-ten Koordinate**, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n\right) - f\left(x_1, ..., x_i, ..., x_n\right)}{h}$$

existiert.

Man schreibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f\left(x_1, ..., x_i, ..., x_n\right) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n\right) - f\left(x_1, ..., x_i, ..., x_n\right)}{h}.$$

Diese Formel zeigt auch, wie man die i-te partielle Ableitung berechnet: Man hält alle anderen Variablen x_1,...,x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n fest und nimmt die gewöhnliche Ableitung nach der Variablen x_i.

Partielle Differenzierbarkeit

Definition

Wir nennen eine Funktion **partiell differenzierbar**, falls sie in allen Variablen partiell differenzierbar ist.

Definition

Ebenso nennen wir eine Funktion **stetig partiell differenzierbar**, falls sie partiell differenzierbar ist und alle Ableitungen stetig sind.

Partielle Ableitungen

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ & (x_1, x_2, x_3) \to \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}. \end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{aligned} f(x,t) &= A\sin(x-vt) \\ \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) &= ? \end{aligned}$$

(A) $A\cos(x-vt)$

(B) $-A\cos(x-vt)$

(C) $vA\cos(x-vt)$

(D) $-vA\cos(x-vt)$

Höhere partielle Ableitungen

Definition

Wir können partielle Ableitungen auch hintereinander ausführen und erhalten höhere Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f\left(x_1, ..., x_n\right) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f\left(x_1, ..., x_n\right)\right).$$

Man beachte, daß diese Schreibweise impliziert, daß zunächst die Ableitung nach x_j ausgeführt wird, und das Zwischenergebniss dann nach x_i abgeleitet wird.

Wir interessieren uns dafür unter welchen Voraussetzungen das Endergebniss nicht von der Reihenfolge der Ableitungen abhängt.

Höhere partielle Ableitungen

Satz

Satz: Sei f zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, ..., x_n) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, ..., x_n)$$

Satz

Allgemeiner gilt: Ist f k-mal stetig partiell differenzierbar, so vertauschen die k-ten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} f(x_1, ..., x_n) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_1)}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{\sigma(i_k)}} f(x_1, ..., x_n),$$

wobei σ eine Permutation von $(i_1, ..., i_k)$ ist.

Höhere partielle Ableitungen

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ & (x_1, x_2, x_3) \to x_1^3 + 3x_1 x_2^2 + x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_1} (6x_1 x_2 + x_1 x_3) = 6x_2 + x_3 \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(3x_1^2 + 3x_2^2 + x_2 x_3\right) = 6x_1. \end{aligned}$$

Quiz

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 3x_1^2 x_2^3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) &= ? \end{aligned}$$

(A) 0
(B) $9x_1^2$
(C) $18x_1 x_2^2$
(D) $9x_1^2 x_2^2 + 6x_1 x_2^3$

Abschnitt 2

Lokale Extremwerte

Lokale Maxima und Minima

Definition

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Wir sagen, daß f in $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ein **lokales Maximum** hat, falls eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ von $\vec{x}_0$ existiert, so daß

$$f\left(\vec{x}_0\right) \geq f\left(\vec{x}\right),$$

für alle $\vec{x} \in U$.

Definition

Gilt dagegen

$$f\left(\vec{x}_0\right) \leq f\left(\vec{x}\right),$$

für alle $\vec{x} \in U$, so spricht man von einem **lokalen Minimum**.

Lokale Maxima und Minima

Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums oder lokalen Maximums ist das Verschwinden aller partiellen Ableitungen an der Stelle $\vec{x}_0$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} f\left(\vec{x}\right) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0.$$

Würde eine partielle Ableitung nicht verschwinden, so gibt es in jeder Umgebung von $\vec{x}_0$ einen Punkt, an dem $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ gilt, sowie einen Punkt an dem $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ gilt. Ist zum Beispiel die i-te partielle Ableitung ungleich Null, so betrachtet man hierzu zwei Punkte, die um einen infinitessimalen positiven bzw. negativen Wert in Richtung des i-ten Einheitsvektors verschoben sind.

Die Hessesche Matrix

Um eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Minimums oder Maximums zu finden betrachten wir die zweiten Ableitungen und definieren die **Hessesche Matrix**:

Definition

$$H_{ij}\left(\vec{x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\left(\vec{x}\right), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Da nach Voraussetzung f zweimal stetig differenzierbar ist, vertauschen die partiellen Ableitungen und die Hessesche Matrix ist offensichtliche symmetrisch:

$$H_{ij}\left(\vec{x}\right) = H_{ji}\left(\vec{x}\right).$$

Positiv definit, negativ definit und indefinit

Definition

Wir bezeichnen eine symmetrische $n \times n$ Matrix A als **positiv definit**, falls für alle $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ gilt:

$$\vec{\xi}^T A \vec{\xi} \quad > \quad 0.$$

Definition

Wir bezeichnen sie als **negativ definit**, falls für alle $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ gilt:

$$\vec{\xi}^T A \vec{\xi} \quad < \quad 0.$$

Definition

Wir bezeichnen die Matrix A als **indefinit**, falls es ein $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ und ein $\vec{\eta} \in \mathbb{R}^n$ gibt, so daß

$$\vec{\xi}^T A \vec{\xi} > 0, \qquad \vec{\eta}^T A \vec{\eta} < 0.$$

Positiv semi-definit und negativ semi-definit

Man findet auch die Begriffe “positiv semi-definit” und “negativ semi-definit”.

Definition

Eine symmetrische $n \times n$ Matrix A nennt man **positiv semi-definit** bzw. **negativ semi-definit**, falls für alle $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\vec{\xi}^T A \vec{\xi} \geq 0, \quad \text{bzw.} \quad \vec{\xi}^T A \vec{\xi} \leq 0.$$

Hurwitz-Kriterium

Um zu entscheiden, ob eine symmetrische Matrix positiv definit ist, kann das Hurwitz-Kriterium verwendet werden:

Satz (Hurwitz)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine reelle symmetrische $n \times n$ *Matrix. A ist positive definit, falls*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ ... & & ... \\ a_{k1} & ... & a_{kk} \end{vmatrix} > 0$$

für alle $k \in \{1, ..., n\}$ *gilt.*

Hurwitz-Kriterium

Beispiel

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit:

$$\begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 50.$$

Hurwitz-Kriterium

Satz

Eine reelle Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist

- *positiv definit, falls alle Diagonaleinträge positiv sind:*

$$\lambda_j > 0, \quad \forall\, 1 \leq j \leq n.$$

- *negativ definit, falls alle Diagonaleinträge negativ sind:*

$$\lambda_j < 0, \quad \forall\, 1 \leq j \leq n.$$

Beispiel

Die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit.

Quiz

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist

(A) positiv definit

(B) negativ definit

(C) negativ semi-definit

(D) indefinit

Lokale Extremwerte

Wir kehren zur Betrachtung der lokalen Minima und Maxima einer Funktion zurück. Wir erhalten die folgende Aussage:

Satz

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, so daß

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}) \right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

- *Ist die Hessesche Matrix $H_{ij}(\vec{x}_0)$ positiv definit, so besitzt f in $\vec{x}_0$ ein* **lokales Minimum**.
- *Ist sie negativ definit, so besitzt f in $\vec{x}_0$ ein* **lokales Maximum**.
- *Ist die Hessesche Matrix indefinit, so sagt man, daß f in $\vec{x}_0$ einen* **Sattelpunkt** *besitzt.*

Beispiel 1

Beispiel

Sei

$$f(x,y) \quad = \quad x^2 + y^2.$$

Im Punkte $\vec{x}_0 = (0,0)$ verschwinden die partiellen Ableitungen:

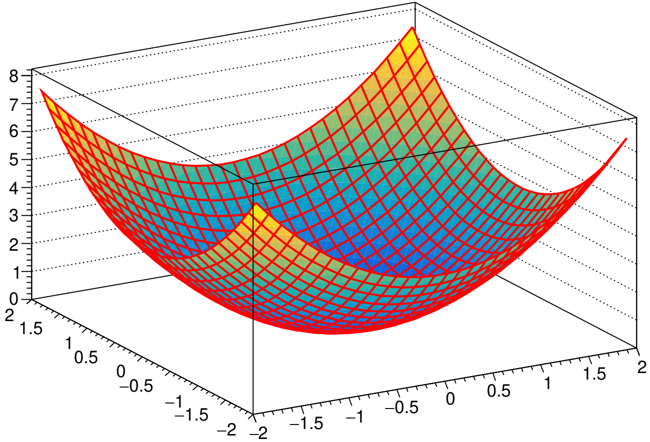
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{x}=(0,0)} = 2x|_{\vec{x}=(0,0)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{x}=(0,0)} = 2y|_{\vec{x}=(0,0)} = 0.$$

Die Hessesche Matrix ist gegeben durch

$$H(\vec{x}) \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist positiv definit und f hat an der Stelle $\vec{x}_0 = (0,0)$ ein Minimum.

Beispiel 1



Beispiel 2

Beispiel

Sei nun

$$f(x,y) = x^2 - y^2.$$

Im Punkte $\vec{x}_0 = (0,0)$ verschwinden die partiellen Ableitungen:

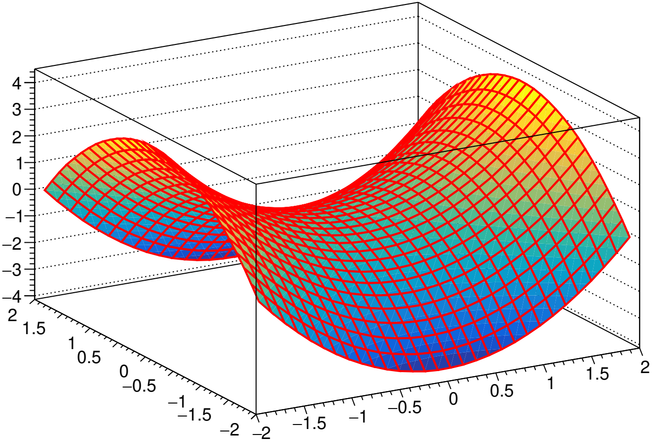
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{x}=(0,0)} = 2x|_{\vec{x}=(0,0)} = 0, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{x}=(0,0)} = -2y|_{\vec{x}=(0,0)} = 0.$$

Die Hessesche Matrix ist gegeben durch

$$H(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix ist indefinit und f hat an der Stelle $\vec{x}_0 = (0,0)$ einen Sattelpunkt.

Beispiel 2



Organisatorisches

Plenumsdiskussion heute um 13:00h!