# Vektoranalysis

## Mathematischer Brückenkurs

Stefan Weinzierl

Institut für Physik, Universität Mainz

Wintersemester 2020/21

# Abschnitt 1

## Allgemeines

# Motivation

- Eine gewöhnliche Funktion ist beispielsweise eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ x & \to & f(x). \end{array}$$

- Eine Funktion mehrerer Variablen ist beispielsweise eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ (x_1, ..., x_n) & \to & f(x_1, ..., x_n). \end{array}$$

- Wir betrachten nun den allgemeinen Fall und lassen nun auch einen höherdimensionalen Wertebereich zu, beispielsweise

$$\begin{array}{rcl} \vec{f} & : & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \\ (x_1, ..., x_n) & \to & \vec{f}(x_1, ..., x_n). \end{array}$$

# Definition

## Definition

Wir betrachten eine Abbildung, in dem der Definitionsbereich $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und der Wertebereich $W$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist:

$$\begin{aligned} \vec{f} \quad &: \quad U \to W, \\ (x_1, ..., x_n) \quad &\to \quad \vec{f}(x_1, ..., x_n). \end{aligned}$$

Man bezeichnet $\vec{f}$ als ein Vektorfeld.
Jedem Punkt $(x_1, ..., x_n) \in U$ wird ein Vektor $\vec{f} \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet.

# Vektorfelder

Schreiben wir $\vec{f}$ in Komponenten

$$\vec{f}\,(x_1, ..., x_n) \quad = \quad \begin{pmatrix} f_1\,(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ f_m\,(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$$

so haben wir $m$ Abbildungen

$$\begin{aligned} f_j \quad &: \quad U \to \mathbb{R}, \\ (x_1, ..., x_n) \quad &\to \quad f_j\,(x_1, ..., x_n)\,. \end{aligned}$$

Wir schreiben im folgenden $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$.

# Beispiele

- Elektrische Felder: Jedem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird ein Feld $\vec{E}(\vec{x})$ zugeordnet, daß das elektrische Feld an diesem Ort angibt.
- Magnetische Felder: Jedem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird ein Feld $\vec{B}(\vec{x})$ zugeordnet, daß das magnetische Feld an diesem Ort angibt.
- Strömungsfelder: Jedem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird ein Feld $\vec{v}(\vec{x})$ zugeordnet, daß die Geschwindigkeit des Mediums an diesem Ort angibt. (Dies kann eine strömende Flüssigkeit sein, oder der Wind in der Atmosphäre.)

# Beispiele

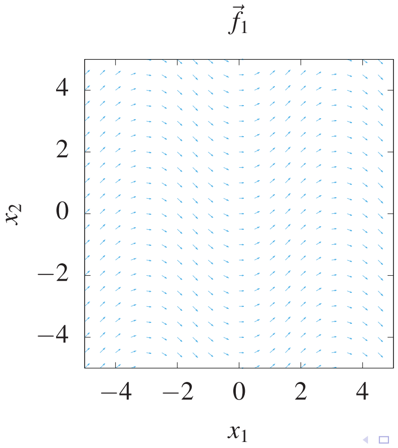
## Beispiel

Wir betrachten drei Beispiele für Vektorfelder:

$$\begin{aligned}
\vec{f}_1 \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\
& \quad \vec{f}_1(\vec{x}) = \left( \begin{array}{c} 1 \\ \sin x_1 \end{array} \right), \\
\vec{f}_2 \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\
& \quad \vec{f}_2(\vec{x}) = \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right), \\
\vec{f}_3 \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\
& \quad \vec{f}_3(\vec{x}) = \left( \begin{array}{c} -x_2 \\ x_1 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

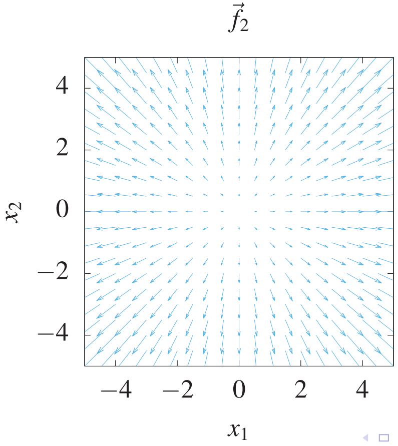
# Beispiel 1

$$\vec{f}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x_1 \end{pmatrix}$$



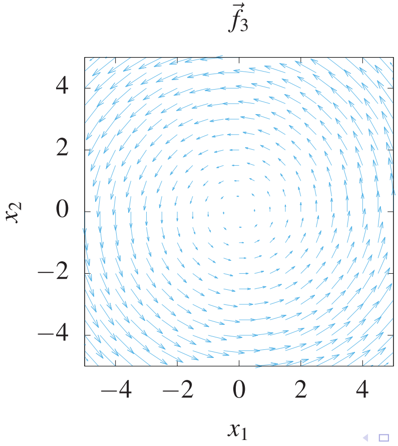
# Beispiel 2

$$\vec{f}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



# Beispiel 3

$$\vec{f}_3(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



Abschnitt 2

# Die totale Ableitung

# Die totale Ableitung

## Definition

Wir bezeichnen eine Abbildung $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^m$ als im Punkte $\vec{x}_0 \in U$ **total differenzierbar**, falls es eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} A & : & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \\ \vec{x} & \to & A\vec{x}, \end{array}$$

gibt, so daß in einer Umgebung von $\vec{x}_0$ gilt:

$$\vec{f}\left(\vec{x}_0 + \vec{\xi}\right) = \vec{f}\left(\vec{x}_0\right) + A\vec{\xi} + o\left(|\vec{\xi}|\right).$$

$A$ ist eine von $\vec{x}$ unabhängige $m \times n$-Matrix.

# Die totale Ableitung

- Die kleine “o”-Schreibweise bedeutet, daß das Restglied durch eine Funktion $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$ gegeben ist, für die gilt

$$\lim_{|\vec{\xi}| \to 0} \frac{\vec{\varphi}(\vec{\xi})}{|\vec{\xi}|} = \vec{0}.$$

  Das Restglied verschwindet also schneller als der lineare Term für $|\vec{\xi}| \to 0$.

- Die Bedingung an die totale Differenzierbarkeit bedeutet also, daß sich die Abbildung in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\vec{x}_0$ durch eine Konstante $\vec{f}\left(\vec{x}_0\right)$ und einen linearen Term $A\vec{\xi}$ beschreiben läßt.

# Die Jacobi-Matrix

Neben der totalen Differenzierbarkeit haben wir natürlich noch die partiellen Ableitungen der $i$-ten Komponente $f_i$ nach der $j$-ten Koordinate:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{f_i\left(x_1, ..., x_j + h, ..., x_n\right) - f_i\left(x_1, ..., x_j, ..., x_n\right)}{h}.$$

Diese partiellen Ableitungen definieren eine $m \times n$ Matrix $J_{ij}$

$$J_{ij}\left(\vec{x}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \qquad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n,$$

die man als Jacobi-Matrix oder Funktional-Matrix bezeichnet. Auch die Bezeichnung Differential wird verwendet, und man findet die Notation

$$D\vec{f}\left(\vec{x}\right) = J\left(\vec{x}\right).$$

# Die totale Ableitung

Für den Zusammenhang zwischen totaler Differenzierbarkeit und partieller Differenzierbarkeit haben wir die folgenden Sätze:

## Satz

*Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die im Punkte $\vec{x}_0 \in U$* **total differenzierbar** *sei, d.h.*

$$\vec{f}\left(\vec{x}_0 + \vec{\xi}\right) = \vec{f}\left(\vec{x}_0\right) + A\vec{\xi} + o\left(||\vec{\xi}||\right).$$

*Dann ist $\vec{f}$ im Punkte $\vec{x}_0$ stetig und alle Komponenten $f_i : U \to \mathbb{R}$ von $\vec{f}$ sind im Punkte $\vec{x}_0$* **partiell differenzierbar** *und es gilt*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(\vec{x}_0\right) = A_{ij}.$$

# Die totale Ableitung

## Satz

*Sei wieder $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Es sei weiter vorausgesetzt, daß die Abbildung $\vec{f}$ im Punkte $\vec{x}_0 \in U$* **stetig partiell differenzierbar** *ist, d.h. alle partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(\vec{x}_0\right)$$

*existieren und sind stetig. Dann ist $\vec{f}$ in $\vec{x}_0$* **total differenzierbar**.

# Die totale Ableitung

Wir haben also die folgenden Implikationen:

*stetig partiell differenzierbar* $\Rightarrow$ *total differenzierbar* $\Rightarrow$ *partiell differenzierbar*

Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

Abschnitt 3

# Der Nabla-Operator

# Der Gradient

Sei $U \subset \mathrm{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion von $n$ Variablen.

## Definition

Die partiellen Ableitungen von $\varphi$ definieren ein Vektorfeld, welches man als den Gradienten von $\varphi$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi \; &: \; U \to \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{grad} \varphi\,(\vec{x}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \ldots \\ \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Gradient einer skalaren Funktion ist also ein Vektorfeld, daß in der $j$-ten Komponente die $j$-te partielle Ableitung enthält.

# Der Nabla-Operator

## Definition

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators läßt sich der Gradient auch wie folgt schreiben:

$$\text{grad}\, \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

# Der Nabla-Operator

- $\vec{\nabla}$ ist ein Operator, der auf eine Größe, wie zum Beispiel eine Funktion, die abgeleitet werden kann, wirkt. Man sollte diese Größe daher immer mitangeben.
- Mathematische Beziehungen, in denen die Größe auf die ein Operator wirkt fehlt, machen nur Sinn, wenn sie für alle möglichen Größen des Problems (wie zum Beispiel für alle Testfunktionen) gelten.

## Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ & \varphi\left(\vec{x}\right) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten für den Gradienten

$$\text{grad}\,\varphi\left(\vec{x}\right) = \vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

# Minima und Maxima

- Wir hatten bereits gesehen, daß eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Maximums bzw. eines lokalen Minimums im Punkte $\vec{x}_0$ das Verschwinden aller partiellen Ableitungen in diesem Punkte ist.
- Das Verschwinden aller partiellen Ableitungen ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}_0\right) = \vec{0},$$

d.h. der Gradient verschwindet.

# Quiz

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$
$$\varphi\left(\vec{x}\right) = x_1 x_2$$

$$\vec{\nabla}\varphi\left(\vec{x}\right) = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

# Die Divergenz

## Definition

Sei $U \subset \mathrm{R}^n$ eine offene Menge und $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^n$ eine partiell differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die Divergenz dieses Vektorfeldes als eine skalare Funktion der $n$ Variablen

$$\mathrm{div}\, \vec{f} \quad : \quad U \to \mathbb{R},$$

die durch

$$\mathrm{div}\, \vec{f}\,(\vec{x}) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j\,(\vec{x})}{\partial x_j}$$

gegeben ist. Mit Hilfe des Nabla-Operators schreibt man auch oft

$$\mathrm{div}\, \vec{f}\,(\vec{x}) \quad = \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\,(\vec{x})\,.$$

# Die Divergenz

## Beispiel

Wir betrachten das Vektorfeld

$$\begin{aligned} \vec{f} \;&:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \\ \vec{f}\left(\vec{x}\right) &= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ 3x_2 - x_1 \\ 5x_3 + 7x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten für die Divergenz

$$\mathrm{div}\, \vec{f}\left(\vec{x}\right) \;=\; \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\left(\vec{x}\right) = 2x_1 + 3 + 5 = 2x_1 + 8.$$

# Die Divergenz

## Beispiel

Es ist auch interessant die Divergenz der drei eingangs gezeigten Vektorfelder zu berechnen. Man findet:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\, \vec{f}_1(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_1(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin x_1 = 0, \\
\mathrm{div}\, \vec{f}_2(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_2(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 = 2, \\
\mathrm{div}\, \vec{f}_3(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{f}_3(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} (-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 = 0.
\end{aligned}$$

Von diesen drei Beispielen hat also nur $\vec{f}_2$ eine nicht-verschwindende Divergenz.

Die Divergenz beschreibt die **Quellen** und **Senken** eines Vektorfeldes.

# Quiz

$$\begin{aligned} \vec{f} \quad : & \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \\ & \quad \vec{f}\left(\vec{x}\right) = \left( \begin{array}{c} x_1 x_2 \\ 3 x_1 x_2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}\left(\vec{x}\right) \quad = \quad ?$$

(A) $4$
(B) $3x_1 + x_2$
(C) $x_1 + 3x_2$
(D) $4x_1 x_2$

# Der Laplace-Operator

Wir betrachten noch die folgende Kombination von Gradient und Divergenz:

Sei $U \subset \mathrm{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion von $n$ Variablen.

Wir wenden erst den Gradienten auf $\varphi$ an, und dann die Divergenz auf das resultierende Vektorfeld. Wir erhalten somit wieder eine skalare Funktion:

## Definition

$$\begin{aligned} \Delta\varphi \quad &: \quad U \to \mathbb{R}, \\ & \quad \Delta\varphi\left(\vec{x}\right) = \mathrm{div}\;\mathrm{grad}\;\varphi\left(\vec{x}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi\left(\vec{x}\right)}{\partial x_j^2}. \end{aligned}$$

*Mit Hilfe des Nabla-Operators können wir wieder schreiben:*

$$\Delta \varphi \left(\vec{x}\right) \;=\; \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi \left(\vec{x}\right).$$

**Definition**

Wir bezeichnen mit

$$\Delta \;=\; \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

den Laplace-Operator.

# Der Laplace-Operator

## Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi \quad : \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \\ & \varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Wir hatten bereits den Gradienten berechnet:

$$\text{grad}\, \varphi(\vec{x}) \quad = \quad \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}.$$

Die Anwendung des Laplace-Operators ergibt

$$\Delta\varphi(\vec{x}) \quad = \quad \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} \; = \; 2+2+2 \; = \; 6.$$

Abschnitt 4

# Vektorfelder in drei Dimensionen

# Vektorfelder in drei Dimensionen

Wir betrachten noch den Spezialfall von Vektorfeldern in drei Dimensionen:

$$\vec{A} \quad : \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

## Definition

Hier können wir noch eine weitere Operation einführen, die man als Rotation bezeichnet und wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \text{rot}\, \vec{A} \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \\ \text{rot}\, \vec{A}\left(\vec{x}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3\left(\vec{x}\right)}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2\left(\vec{x}\right)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1\left(\vec{x}\right)}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3\left(\vec{x}\right)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2\left(\vec{x}\right)}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1\left(\vec{x}\right)}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

*Mit Hilfe des Nabla-Operators und des Kreuzproduktes läßt sich dies auch schreiben als*

$$rot\, \vec{A}\left(\vec{x}\right) \quad = \quad \vec{\nabla} \times \vec{A}\left(\vec{x}\right).$$

# Die Rotation

## Beispiel

Sei

$$\vec{A} \; : \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$
$$\vec{A}\left(\vec{x}\right) = \left( \begin{array}{c} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{array} \right).$$

Dann ist

$$\mathrm{rot}\, \vec{A}\left(\vec{x}\right) \; = \; \vec{\nabla} \times \vec{A}\left(\vec{x}\right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right)$$

# Die Rotation

## Beispiel

Kehren wir nocheinmal zu den eingangs diskutierten Vektorfeldern zurück.

Diese Vektorfelder sind Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, daher ist die Operation der Rotation nicht unmittelbar darauf anwendbar.

Wir können aber trotzdem für ein Vektorfeld $\vec{f} = (f_1, f_2)$ die anti-symmetrische Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1$$

betrachten.

# Die Rotation

## Beispiel

Wir finden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} f_{12} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \sin x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} 1 = \cos(x_1), \\
\frac{\partial}{\partial x_1} f_{22} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{21} &= \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 = 0, \\
\frac{\partial}{\partial x_1} f_{32} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{31} &= \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} (-x_2) = 2.
\end{aligned}$$

Die Rotation beschreibt die **Wirbel** eines Vektorfeldes.

# Rotation eines Gradientenfeldes

## Satz

*Sei $U \subset \mathrm{R}^3$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann*

$$\begin{aligned} \textit{rot grad}\, \varphi &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \left( \vec{\nabla} \varphi \right) &= 0. \end{aligned}$$

## Beweis.

Wir betrachten die erste Komponente von rot grad $\varphi$:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \varphi - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi = 0.$$

Gleiches gilt für die anderen Komponenten.

Ein Gradientenfeld ist also rotationsfrei. □

# Divergenz eines Rotationsfeldes

## Satz

*Sei $U \subset \mathrm{R}^3$ eine offene Menge und $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann*

$$\begin{aligned} \text{div rot } \vec{f} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{f} \right) &= 0. \end{aligned}$$

## Beweis.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \times \vec{f} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ein Rotationsfeld ist also divergenzfrei. □

Viel Erfolg in Ihrem Studium!